Über

Örter von Treffgeraden entsprechender Strahlen

in eindeutig und linear verwandten Strahlengebilden erster bis vierter Stufe.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde

der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau

ACAD. LUGD BAT. BIBL.

eingereicht und mit ihrer Genehmigung veröffentlicht von

Fritz Kliem.

Donnerstag, den 11. März 1909, vormittags 11 Uhr
im Musiksaale

Vortrag:

„Die Behandlung der Normalen bei Apollonius"

und PROMOTION.

Borna - Leipzig
Buchdruckerei Robert Noske
1909.

Gedruckt mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät der Königl. Universität Breslau.

Referent: Professor Dr. Sturm.

Termin der mündlichen Prüfung: 13. Januar 1909.

Herrn Geheimrat Sturm

als Zeichen der Hochachtung

und Dankbarkeit.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

I. Gebilde erster Stufe (Strahlenbüschel und Regelscharen) 7

II. Einige Hilfssätze 12

III. Gebilde zweiter Stufe (Strahlenbündel, Strahlenfelder und Strahlennetze) 18

IV. Gebilde dritter Stufe (Strahlengebüsche) 39

V. Gebilde vierter Stufe (Strahlenräume) 45

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548211_0178

I. Gebilde erster Stufe.
(Strahlenbüschel und Regelscharen.)

Betrachtet man projektive Strahlenbüschel im Raume, so kann man den Inbegriff derjenigen Strahlen des Raumes untersuchen, die entsprechenden Strahlen aus den Büscheln begegnen. Man gelangt so zu den folgenden bekannten Sätzen[1]):

(1.) *Liegen 2 projektive Strahlenbüschel im Raume vor, so ist die Gesamtheit aller der Strahlennetze,*[2]) *die je 2 entsprechende Strahlen zu Leitgeraden haben, ein tetraedraler Komplex.*

(2.) *Sind 3 projektive Strahlenbüschel im Raume gegeben, so führen je 3 entsprechende Strahlen als Leitgeraden zu einer Regelschar, und der Inbegriff dieser Regelscharen ist eine in sich duale Kongruenz dritter Ordnung dritter Klasse.*

(3.) *Die Treffgeraden der Quadrupel entsprechender Strahlen in 4 projektiven Strahlenbüscheln erzeugen eine Regelfläche achten Grades.*

(4.) *Bei 5 projektiven Strahlenbüscheln gibt es 10 Quintupel entsprechender Strahlen, die eine Treffgerade besitzen.*

Die analogen Fragen wollen wir nun zunächst für projektive Regelscharen beantworten.

Sind 2 projektive Regelscharen $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ gegeben, so bilden die Treffgeraden entsprechender Erzeugenden einen Komplex, dessen Grad zu bestimmen ist, d. h. die Anzahl der in einem beliebigen Strahlenbüschel des Raumes enthaltenen Treff-

---

[1]) vgl. Sturm, Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften Bd. 1 § 37 S. 401 ff. — Zu (3.) vgl. E. Weiß, Anzahlbestimmungen für das Strahlennetz, Diss. von Breslau 1907, S. 7.

[2]) Ein Strahlennetz ist die Gesamtheit der Strahlen, die 2 feste, windschiefe Geraden treffen. Die beiden festen Geraden heißen die Leitgeraden des Netzes.

geraden. Es sei (S, σ) ein beliebiger Strahlenbüschel; in ihm können wir, wie folgt, eine Korrespondenz [2, 2] festlegen.

Ein beliebiger Strahl a trifft 2 Erzeugende von $\mathfrak{R}_1$; die beiden entsprechenden Erzeugenden von $\mathfrak{R}_2$ schneiden die Ebene σ in 2 Punkten, und die Strahlen a' nach diesen beiden Punkten werden dem Strahle a zugeordnet. Genau so entsprechen dann einem beliebigen Strahle a' auch 2 Strahlen a, und somit ist eine Korrespondenz [2, 2] in dem Büschel entstanden. Die 4 Koinzidenzstrahlen sind die in den Büschel fallenden Strahlen des Komplexes.

Damit ist also erkannt:

(5.) *Sind 2 projektive Regelscharen gegeben, so ist der Inbegriff der Strahlennetze, die je 2 entsprechende Erzeugende zu Leitgeraden haben, ein Komplex vierten Grades.*

Bei 2 projektiven Regelscharen gibt es 4 Paare sich schneidender entsprechender Geraden.[1]) Die Strahlenbündel um die Schnittpunkte und die Strahlenfelder in den Verbindungsebenen dieser ausgezeichneten Paare gehören dem Komplex an.

Sind 3 projektive Regelscharen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$ gegeben, so führt jedes Tripel entsprechender Strahlen x_1, x_2, x_3 zu einer Regelschar $[x_1\, x_2\, x_3]$, deren Leitgeraden x_1, x_2, x_3 sind. Die Gesamtheit dieser Regelscharen ist eine Kongruenz, deren Ordnung und Klasse wir festzustellen haben.

Zunächst untersuchen wir die Ordnung, d. i. die Anzahl der durch einen beliebigen Punkt gehenden Kongruenzstrahlen. Zu diesem Zwecke betrachten wir den durch 2 von den Regelscharen etwa, $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$, erzeugten Komplex vierten Grades und den von dem beliebigen Punkte P ausgehenden Komplexkegel vierter Ordnung. Da von P genau eine Treffgerade an jedes Paar entsprechender Erzeugenden von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ gezogen werden kann, so befinden sich die Kanten dieses Kegels in eindeutiger Beziehung zu den Erzeugenden von $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ und damit auch zu den von $\mathfrak{R}_3$. Die Erzeugenden von $\mathfrak{R}_3$ verbinden wir nun mit P durch Ebenen; diese umhüllen einen Kegel zweiter Klasse, dessen Tangentialebenen sich gleichfalls in pro-

[1]) Sturm, Geometrische Verwandtschaften I Nr. 180.

jektiver Beziehung zu den Kanten des Kegels vierter Ordnung befinden.

Nun gilt der Satz:

Sind die Kanten eines Kegels von der Ordnung n_1 eindeutig auf die Tangentialebenen eines von derselben Spitze ausgehenden Kegels von der Klasse n_2 bezogen, so gibt es $n_1 + n_2$ inzidente Paare entsprechender Elemente.[1]) Hier fallen somit 6 Kanten des Komplexkegels in die entsprechende Ebene und treffen also die entsprechende Erzeugende der $\mathfrak{R}_3$. Also 6 ist die Ordnung der betrachteten Kongruenz.

Durch die zur vorangehenden duale Betrachtung läßt sich der Nachweis erbringen, daß auch die Klasse der Kongruenz 6 ist. Wir wollen dieses Resultat jedoch auf einem anderen Wege ableiten, der dualisiert auch zur Feststellung der Ordnung brauchbar ist. Schneiden wir die 3 Regelscharen mit einer beliebigen Ebene, so erhalten wir in dieser 3 Kegelschnitte mit projektiven Punktreihen. Für diesen Fall gilt nun, daß es 6 Tripel entsprechender Punkte gibt, die in gerader Linie liegen.[2]) Hier sind also 6 Geraden vorhanden, die entsprechende Punkte der 3 Kegelschnitte enthalten und damit entsprechende Erzeugende der 3 Regelscharen treffen.

Somit hat sich ergeben:

(6.) *Liegen 3 projektive Regelscharen vor, so führen die* ∞^1 *Tripel entsprechender Erzeugenden als Leitgeraden zu ebensovielen Regelscharen, deren Inbegriff eine in sich duale Kongruenz sechster Ordnung und Klasse ist.*

Diese Kongruenz besitzt nun eine Anzahl von singulären Punkten und Ebenen ersten Grades. Sobald nämlich 2 von den Strahlen eines Tripels sich treffen, artet die Regelschar der Treffgeraden aus in 2 Strahlenbüschel, mit der Eigenschaft, daß die Verbindungslinie der beiden Scheitel mit der Schnittlinie der beiden Ebenen identisch ist. Nun besitzen, wie schon vorher erwähnt, 2 projektive Regelscharen 4 Paare entsprechender Erzeugenden, die sich treffen. Also jedes Paar von Regel-

[1]) Sturm, Geometrische Verwandtschaften I Nr. 177.

[2]) Sturm, Geometrische Verwandtschaften I Nr. 177.

scharen, das sich aus den 3 gegebenen herausgreifen läßt, führt zu 4 solchen ausgearteten Regelscharen und somit zu 8 singulären Punkten und 8 singulären Ebenen ersten Grades. Im ganzen hat also unsere Kongruenz 24 singuläre Punkte und 24 singuläre Ebenen ersten Grades.

Die Regelschar, deren Leitgeraden x_1, x_2, x_3 sind, ist oben mit $[x_1\ x_2\ x_3]$ bezeichnet worden; mit dem Symbol $(x_1\ x_2\ x_3)$ wollen wir die Regelschar bezeichnen, die zu der erstgenannten verbunden ist, der also die 3 Geraden x_1, x_2, x_3 als Erzeugende angehören.

Man kann nun auch die Kongruenz untersuchen, die durch die Gesamtheit der Regelscharen $(x_1\ x_2\ x_3)$ gebildet wird. Diese Kongruenz hat nun genau dieselben Gradzahlen wie die behandelte, denn wenn durch einen Punkt eine Erzeugende einer $[x_1\ x_2\ x_3]$ geht, so muß durch ihn auch eine Erzeugende der verbundenen $(x_1\ x_2\ x_3)$ gehen und umgekehrt.

Dieselben 24 Punkte und Ebenen wie für die vorige sind auch für diese Kongruenz singulär vom ersten Grade, aber in anderer Zuordnung; denn ist etwa ξ die Verbindungsebene von 2 sich schneidenden entsprechenden Erzeugenden x_1 und x_2, X ihr Schnittpunkt, X' der Spurpunkt der dritten entsprechenden x_3 in der Ebene ξ und ξ' die Verbindungsebene von X mit x_3, so gehören zur ersten Kongruenz die Büschel (X, ξ') und (X', ξ), zur zweiten (X, ξ) und (X', ξ').

Sind 4 projektive Regelscharen $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3$, $\mathfrak{R}_4$ gegeben, so besitzt jedes Quadrupel entsprechender Erzeugenden 2 Treffgeraden, und die Gesamtheit dieser Treffgeraden ist eine Regelfläche. Um den Grad der Regelfläche festzustellen, d. h. zu ermitteln, wie viele von den genannten Treffgeraden einer beliebigen Geraden g begegnen, verfahren wir folgendermaßen.

Da die Regelschar ein unikursales Gebilde ist, läßt sich auf sie das Chaslessche Korrespondenzprinzip anwenden. Wir legen in einer der Regelscharen, etwa $\mathfrak{R}_1$, die folgende Korrespondenz fest. Zu einer beliebigen Erzeugenden a von $\mathfrak{R}_1$ nehmen wir das Tripel der entsprechenden und zu diesem und der Geraden g die beiden Treffgeraden; sie treffen die Trägerfläche der $\mathfrak{R}_1$ in 4 Punkten, und die 4 Erzeugenden a', die je mit einem dieser

Punkte inzident sind, ordnen wir der a zu. Einer beliebigen Erzeugenden a' sind nun so viele a zugeordnet, als die a' Treffgeraden von Tripeln entsprechender Geraden aus $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$ trifft, die überdies noch die Gerade g treffen. Die fragliche Anzahl ist also identisch mit dem Grade derjenigen Regelfläche aus der durch $\mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$ erzeugten Kongruenz sechster Ordnung sechster Klasse, deren Erzeugende der Geraden g begegnen.

Es gilt nun allgemein der Satz, daß diejenigen Strahlen einer Kongruenz $n$ter Ordnung $m$ter Klasse, die eine feste Gerade treffen, eine Regelfläche vom Grade $n + m$ bilden. Diese Anzahl ist hier 12, also 12 die Zahl der a, die einer a' entsprechen. Somit ist eine Korrespondenz $[12, 4]$ entstanden; die 16 Koinzidenzgeraden bedeuten, daß es 16 Erzeugende von $\mathfrak{R}_1$ gibt, derart, daß von den beiden Treffgeraden an jede von ihnen und die 3 entsprechenden in den anderen Regelscharen eine der beliebigen Geraden g begegnet, oder daß eine beliebige Gerade g von 16 Treffgeraden entsprechender Quadrupel aus den 4 Regelscharen getroffen wird.

Mithin ist festgestellt:

(7.) *Durch die Treffgeraden entsprechender Quadrupel aus 4 projektiven Regelscharen wird eine Regelfläche 16. Grades erzeugt.*

5 projektive Regelscharen $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4, \mathfrak{R}_5$ besitzen eine endliche Anzahl von solchen Quintupeln entsprechender Erzeugenden, die eine Treffgerade haben.

Diese Anzahl ermitteln wir mit Hilfe einer Korrespondenz in einer der Regelscharen, etwa $\mathfrak{R}_5$. Eine beliebige Erzeugende a besitzt ein Quadrupel entsprechender aus den 4 übrigen Regelscharen. Die beiden Treffgeraden dieses Quadrupels begegnen je 2 Erzeugenden a' von $\mathfrak{R}_5$, und diese 4 a' ordnen wir der a zu. Eine beliebige a' trifft nach dem vorangehenden Ergebnisse 16 Treffgeraden von entsprechenden Quadrupeln aus $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$. Die 16 diesen Quadrupeln in $\mathfrak{R}_5$ entsprechenden Erzeugenden sind dann die der a' zugeordneten a, so daß sich also eine Korrespondenz $[16, 4]$ ergeben hat. Die 20 Koinzidenzen besagen, daß es in $\mathfrak{R}_5$ 20 Erzeugende gibt, die von einer der Treffgeraden ihres entsprechenden Quadrupels getroffen werden.

Wir haben also den Satz:

(8.) *Bei 5 projektiven Regelscharen gibt es 20 Quintupel entsprechender Erzeugenden, die eine Treffgerade besitzen.*

II. Einige Hilfssätze.

Bevor wir nun zur Beantwortung der analogen Fragen für Strahlengebilde höherer Stufe übergehen, leiten wir einige für die spätere Untersuchung wichtige Hilfssätze ab.

Die beiden folgenden dualen Sätze (1.) und (2.) werden in der späteren Untersuchung zwar nur für solche Fälle gebraucht, in denen eine der Zahlen p_1 und p_2 den Wert 1 hat. Der Beweis sei jedoch hier für beliebige Werte p_1 und p_2 gegeben, da dieser allgemeinere Fall sich mit denselben Mitteln erledigen läßt wie der genannte spezielle.

Es seien 2 in derselben Ebene gelegene Kurven C_1 und C_2 von den Ordnungen n_1 und n_2 gegeben. Jedem Punkte der ersten seien p_2 Punkte der zweiten und jedem der zweiten p_1 Punkte der ersten zugeordnet. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen eine neue Kurve, deren Klasse wir bestimmen wollen. In dem Strahlenbüschel um einen beliebigen Punkt P ergibt sich die folgende Korrespondenz. Einen beliebigen Strahl a des Büschels schneiden wir mit C_1 in n_1 Punkten; jedem entsprechen p_2 Punkte von C_2, und die $n_1 p_2$ Strahlen a' nach diesen Punkten ordnen wir dem a zu. Ebenso sind jedem a' $n_2 p_1$ Strahlen a zugeordnet, und somit ist eine Korrespondenz $[n_2 p_1, n_1 p_2]$ entstanden. Sie hat $n_1 p_2 + n_2 p_1$ Koinzidenzen, d. h. durch P und so durch jeden Punkt der Ebene gehen $n_1 p_2 + n_2 p_1$ Verbindungslinien entsprechender Punkte von C_1 und C_2.

Also gilt der Satz:

(1.) *Sind 2 ebene Kurven $n_1$ter und $n_2$ter Ordnung C_1 und C_2 so aufeinander bezogen, daß jedem Punkte der ersten p_2 Punkte der zweiten und jedem der zweiten p_1 Punkte der ersten zugeordnet sind, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Kurve von der Klasse $n_1 p_2 + n_2 p_1$.*

Dual ergibt sich:

(2.) *Sind die Tangenten zweier Kurven von den Klassen n_1' und n_2', C_1 und C_2 so aufeinander bezogen, daß jeder Tangente der ersten p_2 der zweiten und jeder der zweiten p_1 der ersten entsprechen, so ist der Ort der Schnittpunkte entsprechender Tangenten eine Kurve von der Ordnung $n_1'p_2 + n_2'p_1$.*

Es seien nun die Tangenten einer Kurve C_1 von der Klasse n_1' so auf die Punkte einer anderen Kurve C_2 von der Ordnung n_2 bezogen, daß jeder Tangente ein Punkt und jedem Punkte p Tangenten entsprechen. Wir wollen untersuchen, wie oft entsprechende Elemente inzident sind. Die Kurve C_1 habe die Ordnung n_1; jeder Tangente dieser Kurve ist eindeutig ihr Berührungspunkt zugeordnet, und folglich stehen die beiden Kurven in der Beziehung, die dem Satze (1.) zugrunde liegt. Es entsteht also durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte eine Kurve C_3 von der Klasse $n_1 + n_2p$.

Zwischen den Tangenten der Kurven C_1 und C_3 besteht nun die folgende Beziehung. Jeder Tangente von C_1 entspricht eine von C_3, diejenige nämlich, die den Berührungspunkt der ersteren mit dem entsprechenden Punkte von C_2 verbindet. Andererseits entspricht jeder Tangente von C_3 eine von C_1, da sie einen Punkt von C_2 mit dem Berührungspunkte einer seiner entsprechenden Tangenten von C_1 verbindet. Nach Satz (2.) für $p_1 = p_2 = 1$ erzeugen nun die Schnittpunkte entsprechender Tangenten von C_1 und C_3 eine Kurve von der Ordnung

$$n_1 + n_2p + n_1'.$$

Dieser Kurve gehört nun die gegebene C_1 ganz an, denn in jedem ihrer Punkte schneidet sich die in ihm berührende Tangente mit ihrer entsprechenden von C_3.

Es bleibt somit eine Kurve von der Ordnung $n_1' + n_2p$ übrig. Haben nun 2 entsprechende Tangenten einen nicht in C_1 liegenden Punkt gemein, so müssen sie zusammenfallen, da sie ja in jedem Falle zufolge der Definition der Kurve C_3 auch einen Punkt auf C_1 gemeinsam haben. Die Restkurve muß also nur aus solchen vereinigten Tangentenpaaren bestehen und, da sie von der Ordnung $n_1' + n_2p$ ist, aus $n_1' + n_2p$ Paaren.

Das bedeutet aber, daß ebensoviele Tangenten von C_1 mit ihrem entsprechenden Punkte inzident sind.

Es hat sich also ergeben:

(3.) *Sind die Tangenten einer Kurve von der Klasse n_1' so auf die Punkte einer anderen von der Ordnung n_2 bezogen, daß jeder Tangente ein Punkt und jedem Punkte p Tangenten entsprechen, so sind $(n_1' + n_2 p)$ mal 2 entsprechende Elemente inzident.*

Ebenso gilt der duale Satz:

(4.) *Sind die Punkte einer Kurve von der Ordnung n_1 so auf die Tangenten einer anderen von der Klasse n_2' bezogen, daß jedem Punkte eine Tangente und jeder Tangente p Punkte entsprechen, so sind $(n_1 + n_2' p)$ mal 2 entsprechende Elemente inzident.*

Durch Projektion in den Bündel erhält man 4 für Kegel mit derselben Spitze geltende analoge Sätze.

Es seien nun 2 Regelflächen R_1 und R_2 $n_1$ten und $n_2$ten Grades gegeben und so aufeinander bezogen, daß jeder Erzeugenden von R_2 eine von R_1 und jeder von R_1 p von R_2 entsprechen. Wir wollen feststellen, wie oft entsprechende Erzeugende sich treffen.

Dazu schneiden wir R_2 mit einer beliebigen Ebene ε; die Punkte dieser Schnittkurve C_ε $n_2$ter Ordnung stehen dann zu den Erzeugenden von R_1 in derselben Beziehung wie die Erzeugenden von R_2 zu denen von R_1. Wir konstruieren uns nun die Verbindungsebenen entsprechender Elemente von R_1 und C_ε; diese bilden einen Torsus, dessen Klasse nach dem Analogon zu Satz (4.) gleich $n_1 p + n_2$ ist. Denn aus einem beliebigen Punkte P wird C_ε durch einen Kegel $n_2$ter Ordnung, R_1 durch einen $n_1$ter Klasse projiziert, die in der Beziehung stehen, die jener Satz voraussetzt. Nunmehr schneiden wir die Regelfläche R_2 noch mit einer anderen Ebene η in einer Kurve C_η. Dann besteht zwischen den Punkten dieser Kurve und den Ebenen des soeben erhaltenen Torsus die folgende Beziehung. Jedem Punkte von C_η entspricht zunächst einer von C_ε, derjenige nämlich, der mit ihm auf derselben Erzeugenden von R_2 liegt. Die Ebene nun, die den Punkt von C_ε mit seiner entsprechenden Erzeugenden von R_1 verbindet, ist

auch dem Punkte von C_η zugeordnet. Jeder Ebene des Torsus ist ein Punkt von C_ε zugehörig, und somit entspricht ihr auch einer von C_η.

Der Torsus schneidet in die Ebene η eine Kurve von der Klasse $n_1 p + n_2$ ein, deren Tangenten zu den Punkten von C_η in derselben Beziehung stehen wie die einschneidenden Ebenen des Torsus zu diesen Punkten. Nach Satz (3.) — oder (4.), da für $p = 1$ beide in denselben, schon zur Ableitung von I (6) zitierten Satz übergehen — sind also $n_1 p + n_2 + n_2$ Tangenten dieser Kurve mit ihrem entsprechenden Punkte von C_η inzident, und daher ebensoviele Ebenen des Torsus mit ihrem entsprechenden Punkte von C_η.

Diese inzidenten Paare ergeben sich nun auf 2 Weisen. Die Schnittlinie $\varepsilon\,\eta$ schneidet die R_2 in n_2 Punkten, und diese sind, als Punkte von C_η aufgefaßt, mit ihren entsprechenden von C_ε identisch, und somit ist jeder von ihnen mit seiner entsprechenden Torsusebene inzident. Die übrigen $n_1 p + n_2$ Inzidenzen besagen, daß auf so vielen Erzeugenden von R_2 2 *getrennte* Punkte mit der entsprechenden Erzeugenden von R_1 in dieselbe Ebene fallen, daß also so oft entsprechende Erzeugende sich schneiden.

Also haben wir den Satz:

(5.) *Sind die Erzeugenden zweier Regelflächen $n_1$ten und $n_2$ten Grades so aufeinander bezogen, daß jeder Erzeugenden der ersten p der zweiten entsprechen und jeder der zweiten eine der ersten entspricht, so treffen sich $n_1 p + n_2$ Erzeugende der einen mit je einer entsprechenden der anderen Regelfläche.*

Diesen Satz benutzen wir nun zur Lösung des folgenden Problems.

Es seien 4 Regelflächen R_1, R_2, R_3, R_4, deren Gradzahlen bezw. n_1, n_2, n_3, n_4 sind, mit ihren Erzeugenden eineindeutig aufeinander bezogen. Jedes Quadrupel entsprechender Erzeugenden besitzt 2 Treffgeraden, und deren Gesamtheit bildet eine Regelfläche, deren Grad wir bestimmen wollen. Wir betrachten zunächst nur 3 von den Regelflächen, etwa R_1, R_2, R_3, und untersuchen die Kongruenz, die durch die Treffgeraden ent-

sprechender Tripel erzeugt wird. Aus einem beliebigen Punkte werden die 3 Regelflächen durch Kegel von den Klassen n_1, n_2, n_3 projiziert, deren Tangentialebenen dann auch in eineindeutiger Beziehung stehen. Für solche Kegel gilt, daß $(n_1 + n_2 + n_3)$ mal 3 entsprechende Tangentialebenen sich in einer Geraden schneiden,[1]) und jede dieser Geraden ist eine Treffgerade von 3 entsprechenden Erzeugenden. Also hat die Kongruenz die Ordnung $n_1 + n_2 + n_3$; dual ergibt sich die Klasse $n_1 + n_2 + n_3$.

Diejenigen Strahlen aus dieser Kongruenz, die einer beliebigen Geraden g begegnen, erzeugen eine Regelfläche R vom Grade $2(n_1 + n_2 + n_3)$. Diese steht zu R_4 in folgender Beziehung. Jede Erzeugende von R_4 besitzt ein Tripel entsprechender aus R_1, R_2, R_3, und von den einfach unendlich vielen Treffgeraden dieses Tripels treffen 2 die g; also jeder Erzeugenden von R_4 entsprechen 2 solche von R. Jede Erzeugende von R ist Treffgerade eines Tripels aus R_1, R_2, R_3 und hat also eine Erzeugende von R_4 zur entsprechenden.

Aus unserem Satze (5.) folgt also, daß $2(n_1 + n_2 + n_3) + 2n_4$ Erzeugende von R sich mit der entsprechenden von R_4 treffen, oder daß $2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$ Treffgeraden von Quadrupeln entsprechender Erzeugenden der Geraden g begegnen.

Wir haben somit den Satz:

(6.) *Sind 4 Regelflächen von den Graden n_1, n_2, n_3, n_4 eineindeutig mit ihren Erzeugenden aufeinander bezogen, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Quadrupel eine Regelfläche vom Grade $2(n_1 + n_2 + n_3 + n_4)$.*

Für die Fälle

$n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1$ und $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 2$,

wo es sich um projektive Strahlenbüschel bezw. Regelscharen handelt, haben wir die Gradzahlen 8 und 16 bereits erhalten.

Zum Schlusse dieses Abschnitts leiten wir einen Satz über eindeutig aufeinander bezogene Strahlenkongruenzen ab. Es seien 4 Kongruenzen K_1, K_2, K_3, K_4 $n$ter Ordnung $m$ter Klasse gegeben, die in kollinearen Räumen einander entsprechen. Die Treffgeraden der Quadrupel entsprechender Strahlen aus ihnen

[1]) Sturm, Geometrische Verwandtschaften I Nr. 177.

erzeugen wiederum eine Kongruenz, deren Gradzahlen wir brauchen werden.

Um zunächst die Ordnung zu ermitteln, benutzen wir das Korrespondenzprinzip im Strahlenbündel.[1]) Es lautet: Besteht zwischen 2 Bündeln mit demselben Scheitel eine solche Korrespondenz, daß jedem Strahle des ersten Bündels n_1 im zweiten und jedem des zweiten n im ersten entsprechen, daß ferner, wenn der eine Strahl einen Büschel durchläuft, die entsprechenden im anderen Bündel einen Kegel $m$ter Ordnung erzeugen, so gibt es $n + n_1 + m$ Koinzidenzstrahlen.

Wir teilen die 4 Kongruenzen in 2 Paare: K_1, K_2; K_3, K_4 und denken uns sodann den Bündel um einen beliebigen Punkt P, in dem wir folgende Korrespondenz haben. Es werden solche Strahlen a und a' einander zugeordnet, von denen a 2 entsprechende Strahlen aus K_1 und K_2, a' die entsprechenden beiden aus K_3 und K_4 trifft. Ein beliebiger Strahl a trifft eine Regelfläche $(n + m)$ten Grades von Strahlen aus K_1, der eine andere $(n + m)$ten Grades in K_2 entspricht; von den Erzeugenden der letzteren trifft a $n + m$, also $n + m$ Paare aus K_1 und K_2. An die $n + m$ entsprechenden Paare in K_3 und K_4 gehen von P $n + m$ Treffgeraden, und diese sind die dem a zugeordneten a'. Ebenso entsprechen jedem a' $n + m$ Strahlen a.

Wenn nun a einen Büschel beschreibt, von welcher Ordnung ist dann der Kegel der entsprechenden a'? Dazu müssen wir wissen, von welchem Grade die Regelflächen sind, die von den getroffenen entsprechenden Strahlen in K_1 und K_2 erzeugt werden, wenn die Treffgerade a einen Büschel beschreibt.

Wir denken uns also eine Gerade g und die Regelfläche $(n + m)$ten Grades, die sie aus K_2 ausscheidet. Dieser entspricht in K_1 ebenfalls eine $(n + m)$ten Grades, und von den Treffgeraden an entsprechende Paare von Erzeugenden dieser beiden Regelflächen fallen $2(n + m)$ in unseren Büschel. Anders ausgesprochen: von den Strahlen a unseres Büschels treffen $2(n + m)$ solche Paare aus K_1 und K_2, deren zu K_2 gehörige Strahlen der beliebigen Geraden g begegnen. Mithin ist der

[1]) vgl. Sturm, Liniengeometrie I Nr. 32.

Grad der einander entsprechenden Regelflächen in K_1 und K_2, die von den getroffenen Strahlen erzeugt werden, wenn a einen Büschel durchläuft, gleich $2(n+m)$. Ihnen entsprechen 2 Regelflächen gleichen Grades in K_3 und K_4, und der Kegel der a', der dem Büschel der a entspricht, ist somit von der Ordnung $4(n+m)$.

In der Korrespondenz im Bündel P gibt es demnach $(n+m)+(n+m)+4(n+m)=6(n+m)$ Koinzidenzstrahlen. Diese Zahl ist die Ordnung der durch die Treffgeraden erzeugten Kongruenz. Dual ergibt sich die Klasse $6(n+m)$.

Wir können demnach feststellen:

(7.) *Liegen 4 Kongruenzen nter Ordnung mter Klasse vor, die in kollinearen Räumen einander entsprechen, so ist der Inbegriff der Treffgeraden an die Quadrupel entsprechender Strahlen aus ihnen eine in sich duale Kongruenz von der Ordnung und Klasse $6(n+m)$.*

III. Gebilde zweiter Stufe. (Strahlenbündel, Strahlenfelder und Strahlennetze.)

Es sind 3 kollineare Strahlenbündel O_1, O_2, O_3 gegeben. Je 3 entsprechende Strahlen x_1, x_2, x_3 führen, als Leitgeraden aufgefaßt, zu einer Regelschar $[x_1\,x_2\,x_3]$, und die Gesamtheit aller dieser ∞^2 Regelscharen bildet einen Komplex. Den Grad dieses Komplexes können wir folgendermaßen feststellen.

Wir denken uns einen beliebigen Strahlenbüschel (S,σ) im Raume; jeder Strahl a in ihm trifft einen Büschel von Strahlen aus O_1 und von dem entsprechenden Büschel in O_2 einen Strahl, also ein Paar entsprechender Strahlen x_1 und x_2. Den Strahl a' nach dem Spurpunkte des entsprechenden x_3 in σ ordnen wir dem a zu. Andrerseits trifft ein beliebiger Strahl a' einen Büschel von O_3; die entsprechenden Büschel aus O_1 und O_2 schneiden in die Ebene σ 2 projektive gerade Punktreihen ein, und durch S gehen 2 Strahlen, die entsprechende Punkte dieser Punktreihen verbinden; also dem a' sind 2 Strahlen a zugeordnet.

Mithin ist in dem Büschel (S,σ) eine Korrespondenz [2,1] entstanden; ihre Koinzidenzstrahlen treffen entsprechende

Strahlen aus allen 3 Bündeln, sind also Strahlen des Komplexes, dessen Grad somit gleich 3 ist.

Zu diesem Resultate gelangen wir auch durch die nachstehende Erörterung. Durch jeden der 3 Bündelscheitel legen wir eine beliebige Gerade, u_1 durch O_1, v_2 durch O_2, w_3 durch O_3. In den Büscheln um diese Geraden lassen wir solche Ebenen einander entsprechen, die durch entsprechende Geraden der Bündel gehen. Diese Zuordnung ist Trilinearität.[1]) Denn eine beliebige Ebene durch u_1 enthält einen Büschel von Strahlen x_1, dem ein Büschel von x_2 entspricht, und von dessen Strahlen fällt genau einer in eine beliebige Ebene durch v_2. Die Ebene durch w_3, die den diesem x_2 entsprechenden x_3 enthält, ist die den beiden ersten Ebenen durch u_1 und v_2 entsprechende. Also 2 beliebige Ebenen in 2 der 3 Büschel bestimmen eindeutig eine ihnen zugeordnete im dritten Büschel, mithin ist Trilinearität entstanden.

Wir ermitteln nun zunächst die neutralen Paare dieser Trilinearität. Die neutralen Ebenen im Büschel u_1 sind, wie wir sogleich zeigen werden, die Ebenen nach den Geraden v_1 und w_1, die den Achsen v_2 und w_3 in O_1 entsprechen. Das Analoge gilt für die beiden anderen Büschel; in v_2 haben wir also die Ebenen nach u_2 und w_2, in w_3 die nach u_3 und v_3. Wir wollen den Nachweis beispielsweise für die Büschel u_1 und v_2 führen. Das eine singuläre Paar für diese beiden Büschel ist u_1v_1, v_2u_2, das andere u_1w_1, v_2w_2. Denn der Büschel in u_1v_1 hat zu seinem entsprechenden in O_2 gerade den in die Ebene v_2u_2 fallenden, und es kann also jeder Strahl dieses Büschels als Schnittstrahl aufgefaßt werden. Die entsprechenden Strahlen in O_3 bilden auch einen Büschel, und von dessen Strahlen liegt in jeder Ebene durch w_3 einer, und somit ist den Ebenen u_1v_1 und v_2u_2 aus u_1 und v_2 jede beliebige Ebene aus w_3 zugeordnet.

Die der Ebene u_1w_1 entsprechende im Bündel O_2 muß durch w_2 gehen, und w_2 ist also deren Schnittlinie mit v_2w_2; ihr entspricht im dritten Büschel w_3, und die Verbindungsebene wird unbestimmt.

---

[1]) Sturm, Geometrische Verwandtschaften I § 33.

Es ergeben sich also als neutrale Paare für u_1 und v_2

$$u_1v_1,\ v_2u_2;\ u_1w_1,\ u_2w_2$$

und ebenso

für v_2 und w_3

$$v_2w_2,\ w_3v_3;\ v_2u_2,\ w_3u_3$$

und für w_3 und u_1

$$w_3u_3,\ u_1w_1;\ w_3v_3,\ u_1v_1.$$

Nunmehr lassen wir die 3 zunächst beliebig angenommenen Geraden u_1, v_2, w_3 durch einen Punkt P gehen; dann erzeugen die Schnittlinien entsprechender Ebenen in den 3 trilinearen Ebenenbüscheln einen Kegel dritter Ordnung. Dieser Kegel ist ein Komplexkegel für den durch die Regelscharen $[x_1\, x_2\, x_3]$ gebildeten Komplex, denn jede seiner Kanten liegt gleichzeitig in 3 entsprechenden Ebenen der Trilinearität, begegnet also 3 entsprechenden Geraden aus den kollinearen Bündeln O_1, O_2, O_3.

Wir haben also nochmals das Resultat erhalten:

(1.) *Liegen 3 kollineare Strahlenbündel vor, so ist der Inbegriff der Regelscharen, die je ein Tripel entsprechender Strahlen zu Leitgeraden haben, ein Komplex dritten Grades.*

Die 3 kollinearen Bündel erzeugen durch die Schnittpunkte entsprechender Ebenen eine kubische Fläche. Lassen wir die Spitze des Komplexkegels auf diese Fläche fallen, so ergibt sich eine singuläre Trilinearität. Wir haben dann 3 sich in P schneidende entsprechende Ebenen α_1, α_2, α_3; nun liegt u_1 in α_1, und da w_3 in α_3 liegt, muß auch w_1 in α_1 liegen; und ebenso liegt auch v_1 in α_1. Also die beiden neutralen Ebenen u_1w_1 und u_1v_1 fallen zusammen. Analog ist die Vereinigung der neutralen Ebenen in den anderen Büscheln zu erkennen.

Je 2 von den gegebenen kollinearen Bündeln führen zu einer kubischen Raumkurve, in deren Punkten sich entsprechende Strahlen schneiden. Jede Doppelsekante einer solchen Kurve ist dann Schnittlinie von 2 entsprechenden Ebenen, mithin trifft diese Gerade entsprechende Büschel aus den beiden Bündeln, und von dem entsprechenden Büschel im dritten Bündel trifft sie einen Strahl. Mithin gehören alle diese Doppelsekanten dem Komplex an.

Legen wir also den Punkt P auf eine der 3 kubischen Raumkurven, so zerfällt der Komplexkegel, da der von P ausgehende Kegel zweiten Grades, der die Kurve projiziert, dem Komplexkegel angehört. In diesem Falle artet die Trilinearität folgendermaßen aus. Die beiden Achsen PO_1 und PO_2 sind in der Kollineation zwischen O_1 und O_2 entsprechend und seien daher mit u_1 und u_2 bezeichnet. Wählt man nun eine beliebige Ebene von u_1, so schneidet die entsprechende im Bündel O_2 eine beliebige Ebene durch u_2 in dem Strahle u_2, und die in der Trilinearität entsprechende Ebene durch w_3 ist die nach u_3. Es ergibt sich also für ein beliebiges Paar aus u_1 und u_2 immer dieselbe entsprechende Ebene im dritten Büschel. Wählt man aber zu einer beliebigen Ebene aus u_1 im Büschel u_2 diejenige, die der ersten in der Kollineation zwischen O_1 und O_2 entspricht — was möglich ist, weil die beiden Achsen u_1 und u_2 in dieser Kollineation einander entsprechen —, so kann jeder Strahl in dieser Ebene als Schnittstrahl angesehen werden, und im dritten Büschel ergibt sich jede Ebene als entsprechende.

Die Trilinearität ist also in der Weise ausgeartet, daß ein beliebiges Ebenenpaar aus u_1 und u_2 eine ganz bestimmte Ebene φ aus w_3 zur entsprechenden hat, daß dagegen ein Paar von solchen Ebenen aus u_1 und u_2, die sich in der Kollineation entsprechen, jede Ebene des Büschels w_3 zur entsprechenden hat.

Geht man von den Büscheln w_3 und u_1 aus, so entspricht einem beliebigen Paare eine, und zwar von Paar zu Paar verschiedene Ebene; denn die der Ebene durch w_3 im Bündel O_1 entsprechende schneidet die Ebene durch u_1 in einer Geraden, und die Ebene aus u_2 nach der entsprechenden ist die dem beliebigen Paare im Büschel u_2 entsprechende Ebene. Ist aber die beliebige Ebene im Büschel w_3 mit $\varphi = w_3 u_3$ identisch, so geht die entsprechende im Bündel O_1 durch u_1 und schneidet sich mit der beliebigen Ebene im Büschel u_1 in u_1; die entsprechende Ebene im dritten Büschel ist dann jede Ebene durch u_2. Genau das Analoge gilt auch, wenn von w_3 und u_2 ausgegangen wird, denn u_1 und u_2 verhalten sich ganz gleichartig.

Demnach zerfällt nun der durch die Schnittlinien entsprechender Ebenen der Trilinearität erzeugte Komplexkegel

aus P, denn die Ebene φ muß ihm ganz angehören: jeder Strahl durch P in φ ist Schnittstrahl eines beliebigen Paares von Ebenen aus u_1 und u_2, zu dem φ als dritte entsprechende Ebene gehört; von dem Komplexkegel dritter Ordnung löst sich also dieser Strahlenbüschel ab. Der übrigbleibende Kegel zweiter Ordnung ist das Erzeugnis der projektiven Ebenenbüschel um u_1 und u_2, denn je 2 in dieser Projektivität gepaarte Ebenen haben eine unbestimmte entsprechende im dritten Büschel, diese kann also immer durch die Schnittlinie gehend gedacht werden. So ergibt sich der schon oben als zum Komplexkegel gehörig erkannte Kegel der Doppelsekanten der kubischen Raumkurve.

Die 3 gegebenen Bündel gehören dem Komplex ganz an; denn denken wir uns etwa einen Strahl aus O_1, so trifft dieser einen Büschel aus O_2 und von dem entsprechenden Büschel aus O_3 einen Strahl; als Strahl durch O_1 trifft er den entsprechenden im Bündel O_1 gleichfalls und gehört somit zum Komplex.

Daraus folgt, daß in einer Ebene, die durch einen oder mehrere Bündelscheitel geht, die Komplexkurve zerfallen muß. Geht die Ebene ε etwa durch O_1, so gehört der in sie fallende Büschel aus dem Bündel O_1 der Komplexkurve an. Der übrigbleibende Bestandteil ist somit ein Kegelschnitt, der folgendermaßen entsteht. Dem Büschel (O_1, ε) entsprechen in O_2 und O_3 gleichfalls Büschel, und diese schneiden in die Ebene ε zwei projektive Punktreihen ein. Die Tangenten des durch diese erzeugten Kegelschnitts haben also die Eigenschaft, daß sie 2 entsprechenden Strahlen aus O_2 und O_3 begegnen, zu denen der entsprechende aus O_1 gleichfalls in ε liegt, mithin gehört der Kegelschnitt zur Komplexkurve.

Geht ε durch 2 von den Scheiteln, etwa O_1 und O_2, so gehören die beiden Büschel um O_1 und O_2 zur Komplexkurve; ε hat als Ebene von O_1 und O_2 je eine entsprechende in O_3, und die Schnittlinie dieser beiden Ebenen schneide die ε im Punkte S. Der Strahlenbüschel um S ergänzt die beiden ersten Büschel zur vollen Komplexkurve; denn jede Gerade durch S in ε trifft den Strahl O_3S, dessen beide entsprechende in ε liegen.

Die Komplexkurve in der Ebene $O_1O_2O_3$ schließlich besteht aus den 3 Büscheln O_1, O_2, O_3.

Bei 3 kollinearen Bündeln gibt es 6 gerade Linien, in denen sich je 3 entsprechende Ebenen schneiden. Wir wollen zeigen, daß jede solche Gerade ein Doppelstrahl des Komplexes ist, d. h. in jedem Strahlenbüschel, zu dem sie gehört, für 2 Strahlen zählt.[1])

Denken wir uns eine beliebige Ebene durch diese Gerade g — in der etwa α_1, α_2, α_3 zusammen kommen — und auf der Geraden einen beliebigen Punkt. Wir haben oben den Grad des Komplexes durch Ermittlung der Koinzidenzstrahlen einer Korrespondenz [2,1] in einem beliebigen Strahlenbüschel (S, σ) festgestellt.

In der in diesem Falle entstehenden [2, 1] entspricht einem Strahle a des ersten Büschels wie im allgemeinen ein a'. Von den beiden Strahlen a aber, die einem a' entsprechen, liegt der eine in g fest. Denn der Strahlenbüschel, welcher die Punktreihe auf a' aus O_3 projiziert, enthält einen in α_3 gelegenen Strahl, zu dem die beiden entsprechenden in α_1 und α_2 liegen; also ist g einer von den beiden entsprechenden a. Der zweite a steht zu a' in Projektivität. Lassen wir a' nun nach g kommen, so vereinigt sich auch der zweite a mit g. Der projizierende Büschel aus O_3 ist der in α_3 gelegene; während nun im allgemeinen Falle 2 projektive Punktreihen auf verschiedenen Geraden sich ergeben und die beiden entsprechenden a die Tangenten aus dem Büschelscheitel an den erzeugten Kegelschnitt sind, handelt es sich hier um 2 konjektive Punktreihen. Der Kegelschnitt wird das Punktepaar der Koinzidenzpunkte, und die beiden Tangenten aus dem Büschelscheitel, einem Punkte von g, vereinigen sich mit g.

Denken wir uns allgemeiner auf einer geraden Linie u 2 Punktreihen in einer Korrespondenz $[n, n_1]$; projizieren wir sie aus 2 Punkten O und O_1 durch Strahlenbüschel, so stehen die in derselben Korrespondenz, und die Schnittpunkte der erzeugten Kurve mit u sind die Koinzidenzpunkte. Nehmen wir nun an,

---

[1]) Sturm, Liniengeometrie III Nr. 766.

daß einem Punkte P, etwa der zweiten Reihe, 2 mit ihm sich vereinigende Punkte der ersten korrespondieren, so kann man im allgemeinen nicht auf doppelte Koinzidenz schließen.[1]) Denn projizieren wir wiederum aus O und O_1, so können wir nur schließen, daß die erzeugte Kurve in P von dem Strahle O_1P tangiert wird, und P ist einfacher Schnittpunkt mit u. Sollten dem Punkte in beiderlei Sinne — wie bei einer involutorischen Korrespondenz — 2 in ihm vereinigte entsprechen, dann würden O_1P und OP in P vereinigte Schnitte haben, P würde Doppelpunkt der Kurve sein und daher zweifacher Schnitt.

In unserem Falle liegt es etwas anders. Übertragen wir unsere Korrespondenz [2, 1] auf eine Punktreihe, so entspricht also einem beliebigen Punkte der zweiten Reihe der feste P und ein anderer, und die *beiden* dem P als Punkt der zweiten Reihe entsprechenden Punkte vereinigen sich mit ihm. Die erzeugte Kurve dritter Ordnung zerfällt hier also in den Strahl OP und einen durch P gehenden Kegelschnitt, weil auch der zweite dem O_1P entsprechende Strahl nach OP fällt. P ist demnach Doppelpunkt der Gesamtkurve und daher zweifacher Koinzidenzpunkt.

Dieses Ergebnis, in den Büschel (S, σ) zurück übertragen, besagt, daß g doppelter Koinzidenzstrahl ist.

Damit ist also bewiesen:

(2.) *Die 6 Geraden, durch welche entsprechende Ebenen aus allen 3 Bündeln gehen, sind Doppelstrahlen des Komplexes.*

Denken wir uns eine kubische Raumkurve, so macht diese die Bündel um irgend 3 ihrer Punkte kollinear, indem immer solche Ebenen entsprechend sind, welche dieselbe Doppelsekante der kubischen Raumkurve projizieren. Für den durch 3 solche Bündel erzeugten Komplex sind nach dem vorangehenden Satze sämtliche Doppelsekanten der Kurve Doppelstrahlen.

Zu jeder der Regelscharen $[x_1x_2x_3]$ existiert nun eine verbundene, die wir wie schon früher mit $(x_1x_2x_3)$ bezeichnen wollen. Der Inbegriff dieser Regelscharen ist auch ein Komplex, dessen Grad wir gleichfalls feststellen wollen.

---

[1]) vgl. Sturm, Geometrische Verwandtschaften I Nr. 187.

Die im folgenden dargestellte Ableitung dieser Gradzahl hat mir Herr Geheimrat Prof. Dr. Sturm gütigst mitgeteilt.

Wir stellen uns die Gesamtheit der Flächen zweiter Ordnung vor, welche sowohl die Regelscharen $[x_1 x_2 x_3]$ wie die $(x_1 x_2 x_3)$ tragen. Durch jeden Punkt P des Raumes gehen ∞^1 Strahlen, die zu Regelscharen $[x_1 x_2 x_3]$ gehören, und bilden einen Kegel dritter Ordnung.

Wir ermitteln nun zunächst die Ordnung desjenigen Kegels, den die zu diesen Regelscharen durch P gehörenden Leitgeraden in einem der Bündel, also etwa die x_1 bilden. Denken wir uns einen beliebigen Strahlenbüschel im Bündel O_1 und die entsprechenden in O_2 und O_3.

Nach I, (2.) gehen nun durch P 3 Strahlen, die entsprechende Strahlen dieser 3 Büschel treffen, oder es liegen in dem Büschel von O_1 3 Strahlen x_1 mit der Eigenschaft, daß sie und ihre entsprechenden x_2 und x_3 je von einem Strahle aus P getroffen werden. Das gilt für jeden Büschel in O_1, also ist der fragliche Kegel dritter Ordnung.

Sodann stellen wir analog die Ordnung des Kegels fest, den die getroffenen Geraden in jedem der Bündel beschreiben, wenn die Treffgeraden eine Komplexkurve durchlaufen. Die durch 3 projektive Strahlenbüschel erzeugte Kongruenz hat auch die Klasse 3, folglich sind in einem beliebigen Büschel von O_1 3 Strahlen vorhanden, die mit ihren beiden entsprechenden eine in die betrachtete Ebene fallende Treffgerade besitzen. Also auch dieser Kegel ist dritter Ordnung.

Es liegt somit folgender Tatbestand vor: zu jedem Strahle im Bündel O_1 gehört eine Fläche zweiten Grades; durch jeden Punkt des Raumes gehen einfach unendlich viele und jede Ebene berühren einfach unendlich viele von diesen Flächen. Die Strahlen x_1, die zu den Flächen gehören, die durch einen beliebigen Punkt P gehen, bilden einen Kegel dritter Ordnung. Dasselbe tun die x_1, die zu den eine beliebige Ebene π berührenden Flächen gehören. Betrachten wir also gleichzeitig P und π, so gibt es, da die zugehörigen Kegel dritter Ordnung 9 Schnittkanten haben, 9 Flächen, die durch P gehen und gleichzeitig π berühren. Nehmen wir jetzt P und π inzident an, so

heißt das: es gibt 9 Flächen, die von der Ebene π berührt werden und durch den in π gelegenen Punkt P gehen, oder eine Erzeugende der einen oder anderen von jeder dieser 9 Flächen getragenen Regelschar fällt in den Büschel (P, π). Da wir nun wissen, daß 3 Geraden in dem Büschel vorhanden sind, die zu Regelscharen $[x_1 x_2 x_3]$ gehören, müssen die übrigen 6 Erzeugende von Regelscharen $(x_1 x_2 x_3)$ sein, d. h.

(3.) *Der von den Regelscharen* $(x_1 x_2 x_3)$ *gebildete Komplex ist sechsten Grades.*

Beispielsweise in der Ebene $O_1 O_2 O_3$ ergibt sich die Komplexkurve sechster Klasse folgendermaßen. Zunächst gehören ihr die 3 Strahlenbüschel um die Scheitel O_1, O_2, O_3 an. Die Ebene $O_1 O_2 O_3$ hat, wenn man sie als zum Bündel O_1 gehörig ansieht, eine entsprechende im Bündel O_2, und von deren Strahlen fällt einer in unsere Ebene. Mithin liegt in $O_1 O_2 O_3$ ein Paar entsprechender Strahlen x_1, x_2; zu der durch dieses Paar und den zugehörigen Strahl x_3 erzeugten Regelschar $(x_1 x_2 x_3)$ gehört der Strahlenbüschel um den Schnittpunkt in der Ebene $O_1 O_2 O_3$, und dieser Büschel gehört somit zur Komplexkurve. Ebenso führt jedes der Bündelpaare $O_2 O_3$, $O_3 O_1$ zu einem solchen Büschel, und diese 3 Büschel ergänzen die ersten 3 zur vollen Komplexkurve sechster Klasse.

Man kann die analogen Betrachtungen auch anstellen für 2 Strahlenbündel, die zu demselben Strahlenfelde korrelativ sind. Bezeichnen wir die beiden Bündel mit O_1 und O_2, das Feld mit ω_3 und entsprechende Geraden in den 3 Gebilden mit x_1, x_2, x_3, so läßt sich auch hier feststellen, daß die Regelscharen $[x_1 x_2 x_3]$ einen Komplex dritten, die $(x_1 x_2 x_3)$ dagegen einen solchen sechsten Grades bilden.

Der Nachweis des Grades für den ersten der beiden Komplexe geschieht am einfachsten wie im vorigen Falle durch eine Korrespondenz [2, 1] in einem beliebigen Strahlenbüschel (S, σ). Denn jeder Strahl a trifft ein Paar x_1, x_2, und der Strahl a' nach dem Spurpunkte des entsprechenden x_3 in σ wird ihm zugeordnet; andrerseits trifft ein beliebiger a' einen Büschel von x_3, dem in O_1 und O_2 gleichfalls Büschel korrespondieren. Diese schneiden in σ projektive Punktreihen ein, und durch S gehen

2 Geraden a, die entsprechende Punkte verbinden, und diese sind dem a' zugeordnet. Die 3 Koinzidenzstrahlen sind die in den Büschel (S, σ) fallenden Komplexstrahlen.

Um den Grad des anderen Komplexes festzustellen, können wir genau dieselbe Betrachtung wie oben in einem der beiden Bündel anstellen oder auch die duale im Felde und erhalten somit auch hier einen Komplex sechsten Grades.

Schließlich ergeben sich dual zu den beiden betrachteten Fällen dieselben Resultate auch für 2 Felder, die zu demselben Bündel korrelativ sind, und für 3 kollineare Felder.

Es seien nunmehr 4 kollineare Bündel O_1, O_2, O_3, O_4 gegeben; jedes Quadrupel entsprechender Strahlen hat 2 Treffgeraden. Die Gesamtheit dieser Treffgeraden ist eine Kongruenz, deren Ordnung und Klasse wir folgendermaßen ermitteln.

In dem Bündel um einen beliebigen Punkt P stellen wir, um zunächst die Ordnung abzuleiten, eine Verwandtschaft her, deren Koinzidenzstrahlen die gesuchten durch P gehenden Strahlen der Kongruenz sind. Ein beliebiger Strahl l aus P trifft ein Paar entsprechender Strahlen x_1, x_2 aus O_1 und O_2; den Strahl l', der das entsprechende Paar x_3, x_4 aus O_3 und O_4 trifft, ordnen wir dem l zu. Ebenso entspricht jedem Strahle l' *ein* l. Es liegt somit eine Cremonasche Verwandtschaft vor, deren Grad festzustellen ist. Wir lassen also l einen Strahlenbüschel durchlaufen und müssen zunächst untersuchen, wie sich dann die von l getroffenen entsprechenden Strahlen x_1 und x_2 bewegen. Ein beliebiger Strahl l trifft einen Büschel von Strahlen x_1 und aus dem Büschel der entsprechenden x_2 einen, und dieser ist der Schnittstrahl der Ebene lO_2 mit derjenigen Ebene λ des Bündels O_2, die der lO_1 als Ebene von O_1 in der Kollineation entspricht. Dreht sich nun l in einem Büschel, so tun die Ebenen lO_1 und lO_2 dasselbe, und zwar sind diese Büschel projektiv, weil beide zum Büschel der l perspektiv. Zum Büschel der lO_1 ist infolge der Kollineation der Büschel der λ projektiv und letzterer also auch zu dem der lO_2. Die fraglichen Strahlen x_2 sind somit die Schnittstrahlen entsprechender Ebenen aus diesen beiden projektiven Büscheln, deren Achsen sich in O_2 schneiden, d. h. die Kanten eines Kegels zweiter Ordnung

aus O_2. Ebenso beschreibt auch x_1 einen Kegel zweiter Ordnung, wenn l einen Büschel durchläuft. Dasselbe gilt wegen der gegebenen Kollineationen auch für die entsprechenden Strahlen x_3 und x_4.

Der Kegel der Strahlen l', der dem Büschel der l entspricht, wird also gebildet durch solche Strahlen aus P, die entsprechenden Kanten zweier projektiver Kegel zweiter Ordnung mit den Spitzen O_3 und O_4 begegnen. Diese beiden Kegel rufen in den Ebenenbüscheln um PO_3 und PO_4 eine Korrespondenz [2, 2] hervor, in der solche Ebenen entsprechend sind, die durch entsprechende Kegelkanten gehen. Der fragliche Kegel ist also vierter Ordnung, und somit ist die Zuordnung der Strahlen l und l' als eine Verwandtschaft vierten Grades erkannt.

Diese Verwandtschaft besitzt in jedem der beiden Bündel 3 zweifache und 3 einfache Hauptstrahlen. Die zweifachen im l-Bündel sind: PO_1, PO_2 und die von P ausgehende Doppelsekante der durch die kollinearen Bündel O_1 und O_2 erzeugten kubischen Raumkurve; denn jeder dieser Strahlen trifft 2 entsprechende Strahlenbüschel aus O_1 und O_2, mithin entspricht ihm der Kegel zweiter Ordnung, der durch die Treffgeraden an entsprechende x_3 und x_4 der entsprechenden Büschel gebildet wird. Die einfachen Hauptstrahlen sind die beiden Strahlen aus P, welche die beiden Paare x_1, x_2 treffen, die den PO_3 und PO_4 als x_3 bezw. x_4 entsprechen, und die Treffgerade desjenigen Paares x_1, x_2, dessen entsprechende x_3 und x_4 in die Ebene PO_3O_4 fallen. Genau ebenso ergeben sich die Hauptstrahlen im anderen Bündel.

Nun hat jede Cremonasche Verwandtschaft $n$ten Grades $n+2$ Koinzidenzen;[1]) hier sind also deren 6 vorhanden, und diese 6 Strahlen treffen entsprechende Strahlen aus allen 4 Bündeln.

Analog folgt, daß auch in jeder Ebene 6 solcher Treffgeraden liegen. Somit haben wir erkannt:

---

[1]) Cremona, Sulle trasformazioni geometriche delle figure piane, Memoria 2ª Nr. 29 (Memorie dell' Accademia di Bologna, serie II, tomo V, 1865).

(4.) *Liegen 4 kollineare Bündel vor, so erzeugen die Treffgeraden sämtlicher Quadrupel entsprechender Strahlen eine Kongruenz sechster Ordnung und sechster Klasse.*

Zu diesem Ergebnisse gelangen wir auch durch die nachstehende Betrachtung, die wir diesmal zur Feststellung der Klasse näher ausführen wollen. Wir denken uns in der Ebene, in der wir die Anzahl der Kongruenzstrahlen untersuchen, die Komplexkurve dritter Klasse des durch O_1, O_2, O_3 erzeugten Komplexes der Regelscharen $[x_1 x_2 x_3]$.

Diejenigen Strahlen in jedem der 3 Bündel, die zu den von Tangenten der Komplexkurve getroffenen Tripeln gehören, durchlaufen, wie schon vorher gezeigt, einen Kegel dritter Ordnung. Der entsprechende Kegel in O_4 ist gleichfalls dritter Ordnung und schneidet in unsere Ebene eine Kurve dritter Ordnung ein. Die Punkte dieser Kurve befinden sich nun zu den Tangenten der Komplexkurve in eineindeutiger Beziehung, und daher gibt es 6 Paare entsprechender Elemente, die inzident sind, d. h. 6 Tangenten der Komplexkurve treffen auch noch den vierten entsprechenden Strahl.

Die 4 Bündelscheitel sind für die Kongruenz singuläre Punkte dritten Grades, denn von jedem geht ein Kegel dritter Ordnung aus, dessen Kanten entsprechende Strahlen aus den 3 anderen Bündeln treffen, und den vierten entsprechenden Strahl treffen sie gleichfalls.

Ganz dieselben Resultate erhält man durch die analogen Gedankengänge, wenn man von den 4 Bündeln einen durch ein Feld ersetzt, das zu den 3 Bündeln korrelativ ist, oder mehrere durch Felder, die untereinander kollinear und zu den Bündeln korrelativ sind. Die Feldebenen sind für die erzeugte Kongruenz singuläre Ebenen dritten Grades.

Wir wollen den Spezialfall betrachten, daß von den 4 Bündelscheiteln zweimal je 2 zusammenfallen; es sei also $O_1 \equiv O_3$, $O_2 \equiv O_4$. Dann gehören die beiden Bündel um O_1 und O_2 der Kongruenz an. Denn jeder Strahl durch O_1 trifft ein Paar x_2, x_4 und infolge der Voraussetzung auch die entsprechenden x_1, x_3.

Durch die gegebenen Kollineationen wird nun zwischen den Ebenenbündeln O_1 und O_2 eine Cremonasche Verwandtschaft

festgelegt, indem jeder Ebene x_1x_3 eine x_2x_4 zugeordnet ist. Zunächst untersuchen wir den Grad der Verwandtschaft, d. h. wir fragen nach der Klasse des Kegels, den x_2x_4 umhüllt, wenn x_1x_3 einen Büschel durchläuft. Denken wir uns im ersten Bündel eine Ebene ξ_1, die wir als Ebene von O_1 auffassen; ihr entspricht in O_3 eine Ebene ξ_3, und der Schnittstrahl $\xi_1\xi_3$ ist derjenige x_3, der mit seinem entsprechenden x_1 in die Ebene ξ_1 fällt. Lassen wir also ξ_1 einen Ebenenbüschel durchlaufen, so tut ξ_3 dasselbe, und die Schnittlinie x_3 beschreibt einen Kegel zweiter Ordnung. Die entsprechenden x_2 und x_4 durchlaufen vermöge der vorausgesetzten Kollineationen gleichfalls Kegel zweiten Grades, und die Verbindungsebenen x_2x_4 entsprechender Kanten dieser beiden Kegel umhüllen einen Kegel vierter Klasse, der dem Büschel der ξ_1 entspricht. Die Verwandtschaft ist somit vierten Grades.

Die Hauptelemente dieserVerwandtschaft ergeben sich folgendermaßen. Der Ebenenbüschel um jeden der 3 Koinzidenzstrahlen im Bündel O_1 ist ein Hauptkegel erster Klasse; die zugehörige einfache Hauptebene im Bündel O_2 ist jedesmal die Verbindungsebene der beiden Strahlen x_2 und x_4, die den in dem Koinzidenzstrahle vereinigten Strahlen x_1 und x_3 entsprechen. Ferner sind die 3 Koinzidenzebenen von O_2 doppelte Hauptebenen, denn in jeder liegen zwei einander entsprechende Büschel von Strahlen x_2 und x_4, und die beiden ihnen entsprechenden Büschel der x_1 und x_3 erzeugen durch die Verbindungsebenen ihrer entsprechenden Strahlen einen Kegel zweiter Klasse, dessen sämtliche Tangentialebenen der Koinzidenzebene in O_2 zugeordnet sind.

Ebenso erkennt man die Hauptebenen in dem anderen Bündel, da sich beide ganz gleichartig verhalten, so daß wir also in jedem Bündel 3 einfache und 3 doppelte Hauptebenen haben.

Die nicht durch O_1 oder O_2 gehenden Kongruenzstrahlen sind nun Schnittstrahlen entsprechender Ebenen in dieser Verwandtschaft der beiden Ebenenbündel. Allgemein gilt nun der Satz: Befinden sich 2 Ebenenbündel in einer Cremonaschen Verwandtschaft $n$ten Grades, so ist das Erzeugnis der Schnittlinien entsprechender Ebenen eine Kongruenz von der Ordnung

n und der Klasse $n + 2$. Hier ergibt sich also eine Kongruenz vierter Ordnung sechster Klasse; sie wird durch die beiden Bündel O_1 und O_2 zur vollen Kongruenz sechster Ordnung sechster Klasse ergänzt.

Sind 5 kollineare Bündel gegegen, so gibt es ∞^1 Quintupel entsprechender Strahlen, die eine Treffgerade besitzen. Diese Treffgeraden erzeugen eine Regelfläche, deren Grad wir bestimmen wollen.

Wir denken uns also eine Gerade g und untersuchen, wie viele solcher Treffgeraden der g begegnen. Nach dem vorangehenden Ergebnisse erzeugen die Treffgeraden entsprechender Strahlen aus irgend 4 von den gegebenen Bündeln, etwa O_1, O_2, O_3, O_4, eine Kongruenz sechster Ordnung sechster Klasse, also bilden diejenigen Strahlen dieser Kongruenz, die der g begegnen, eine Regelfläche 12. Grades. Zunächst stellen wir nun die Ordnung desjenigen Kegels fest, den in jedem der 4 Bündel die Strahlen bilden, deren Treffgeraden diese Regelfläche erzeugen. Denken wir uns einen Strahlenbüschel in O_1, ihm entsprechen 3 Büschel in O_2, O_3, O_4.

Die Gesamtheit der Treffgeraden entsprechender Strahlen in diesen 4 Büscheln ist nun eine Regelfläche achten Grades, also 8 von diesen Treffgeraden treffen die g. Anders ausgesprochen: von den Strahlen in den einzelnen Bündeln, die mit ihren entsprechenden zu der Regelfläche 12. Grades führen, liegen immer 8 in einem beliebigen Strahlenbüschel. Die gesuchten Kegel in den einzelnen Bündeln sind also achter Ordnung, und dieselbe Ordnung hat somit der entsprechende Kegel im fünften Bündel O_5. Die Kanten dieses Kegels achter Ordnung sind auf die Erzeugenden der Regelfläche 12. Grades eineindeutig bezogen. Wie viele Paare entsprechender Geraden treffen sich? Wir projizieren die Regelfläche aus O_5 und haben dann also einen Kegel 12. Klasse, dessen Tangentialebenen eineindeutig auf die Kanten eines Kegels achter Ordnung mit derselben Spitze bezogen sind; es gibt also $12 + 8 = 20$ Paare entsprechender Elemente, die inzident sind, d. h. 20 Erzeugende der Regelfläche, die der entsprechenden Kante des Kegels begegnen.

Der Geraden g und so jeder begegnen also 20 Treffgeraden von Quintupeln entsprechender Strahlen, womit festgestellt ist:

(5.) *In 5 kollinearen Bündeln gibt es ∞^1 Quintupel entsprechender Strahlen, die eine Treffgerade haben, und diese Treffgeraden erzeugen eine Regelfläche 20. Grades.*

Welches ist die Ordnung des Kegels in jedem der 5 Bündel, dessen Kanten zu diesen ausgezeichneten Quintupeln gehören?

In einem beliebigen Büschel von O_5 haben wir die folgende Korrespondenz; zu jedem Strahle a gibt es ein Quadrupel entsprechender in O_1, O_2, O_3, O_4; dieses hat 2 Treffgeraden, die in die Ebene des Büschels 2 Punkte einschneiden. Die beiden Strahlen a' nach diesen Spurpunkten werden dem Ausgangsstrahle a zugeordnet. Jeder Strahl a' trifft nun andrerseits 8 solche Treffgeraden, weil die 4 unserem Büschel in den anderen Bündeln entsprechenden Büschel projektiv sind und somit durch die Treffgeraden entsprechender Quadrupel zu einer Regelfläche achten Grades führen. Dem Strahle a' sind also 8 Strahlen a zugeordnet, nämlich die den 8 getroffenen Quadrupeln in O_5 entsprechenden Strahlen. Die 10 Koinzidenzstrahlen der so entstandenen Korrespondenz $[8, 2]$ sind diejenigen in unserem Büschel, die zu ausgezeichneten Quintupeln mit Treffgeraden gehören.

Die fraglichen Kegel sind also zehnter Ordnung.

Man erhält dieselben Resultate, wenn man im vorangehenden eine beliebige Zahl der Bündel durch Felder ersetzt, die untereinander kollinear und zu den Bündeln, wenn solche vorhanden sind, korrelativ sind. Zu diesem Zwecke hat man die eben angestellten Erörterungen teilweise oder im Falle von 5 Feldern ganz zu dualisieren.

Denken wir uns sodann 6 kollineare Strahlenbündel O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, so gibt es nur eine endliche Anzahl von solchen Sextupeln, die eine Treffgerade besitzen.

Irgend 5 von den Bündeln, etwa O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, führen zu einer Regelfläche 20. Grades, erzeugt durch Treffgeraden von Quintupeln entsprechender Strahlen. Die zu den getroffenen Quintupeln gehörigen Strahlen bilden in jedem der 5 Bündel einen Kegel zehnter Ordnung. Der entsprechende Kegel in O_6

ist also infolge der Kollineationen gleichfalls zehnter Ordnung, und dieser ist mit seinen Kanten eineindeutig auf die Erzeugenden der Regelfläche bezogen. Mithin gibt es 30 Paare von entsprechenden Erzeugenden der beiden Gebilde, die sich treffen. Das bedeutet:

(6.) *Bei 6 kollinearen Strahlenbündeln tritt 30 mal der Fall ein, daß 6 entsprechende Strahlen eine Treffgerade besitzen.*

Auch dieses Ergebnis ändert sich nicht, wenn eine beliebige Anzahl von den 6 Bündeln durch Felder ersetzt wird, die untereinander kollinear, zu den verbleibenden Bündeln korrelativ sind.

Wir wenden uns nunmehr zur Betrachtung von kollinearen Strahlennetzen, worunter wir solche verstehen, die in kollinearen Räumen einander entsprechen.

Sind zunächst 2 kollineare Netze gegeben, so stellen wir fest, daß jede Gerade des Raumes 2 Paare entsprechender Strahlen trifft; denn sie trifft aus dem einen Netze eine Regelschar und von der entsprechenden Regelschar im anderen 2 Strahlen.

Es seien sodann 3 kollineare Netze N_1, N_2, N_3 gegeben. Jedes Tripel entsprechender Strahlen besitzt eine Regelschar von Treffgeraden, und der Inbegriff dieser Regelscharen ist ein Komplex, dessen Grad wir zu bestimmen haben. Zu diesem Zwecke legen wir in einem beliebigen Strahlenbüschel des Raumes folgende Korrespondenz fest.

Ein beliebiger Strahl a des Büschels ist zweimal Treffgerade zweier entsprechenden Strahlen aus N_1 und N_2.

Die beiden Strahlen, die diesen Paaren in N_3 entsprechen, treffen je einen Strahl a' des Büschels, und diese beiden ordnen wir dem a zu. Ein beliebiger Strahl a' trifft eine Regelschar aus N_3; ihr entsprechen in N_1 und N_2 gleichfalls Regelscharen, die in die Ebene des Büschels 2 projektive Kegelschnitte einschneiden. Durch den Scheitel des Büschels gehen dann wie durch jeden Punkt der Ebene 4 Strahlen, die entsprechende Punkte der beiden Kegelschnitte verbinden, also 4 Strahlen, die je ein Paar aus N_1 und N_2 treffen, zu dem a' den entsprechenden Strahl in N_3 trifft. Mithin sind jedem a' 4 Strahlen a zugeordnet, und es ist eine Korrespondenz $[4, 2]$ entstanden.

Die 6 Koinzidenzstrahlen sind die in den Strahlenbüschel fallenden Strahlen des untersuchten Komplexes. Es ist also erwiesen:

(7.) *Wenn 3 kollineare Strahlennetze vorliegen, so bilden die Regelscharen, die je ein Tripel entsprechender Strahlen zu Leitgeraden haben, einen Komplex sechsten Grades.*

Die Leitgeraden der einzelnen Netze gehören diesem Komplexe an, denn jede trifft 2 Paare entsprechender Strahlen aus den beiden anderen Netzen und zu diesen die entsprechenden Strahlen in dem dritten Netze, für das sie Leitgerade ist. Dieser Umstand, daß jede Leitgerade 2 Tripel trifft, legt die Vermutung nahe, daß sie Doppelstrahl des Komplexes sei. Um dies jedoch exakt zu beweisen, muß man zeigen, daß sie in jedem Strahlenbüschel, dem sie angehört, 2 Komplexstrahlen repräsentiert. Das gelingt dadurch, daß wir in jedem dieser Büschel die übrigen Komplexstrahlen ermitteln.

Wir betrachten also eine Leitgerade l etwa von N_3, auf ihr einen beliebigen Punkt O, durch sie gehend eine beliebige Ebene ω und wollen die in den Büschel (O, ω) fallenden Komplexstrahlen haben. Ein Strahl von (O, ω), der nicht mit l identisch ist, kann nur ein solches Tripel von entsprechenden Strahlen aus N_1, N_2, N_3 treffen, dessen zu N_3 gehörige Gerade entweder mit O oder ω inzident ist. Der getroffene Strahl im Netze N_3 ist also auf 2 Büschel beschränkt; diese sind: der in ω um den Spurpunkt der zweiten Leitgeraden l' und der um O in der Verbindungsebene mit l'. Jedem dieser Büschel entspricht ein ebensolcher in N_1 und N_2. Wir haben also zweimal 2 projektive Büschel im Raume und brauchen für jede dieser beiden Projektivitäten die Anzahl der in den Büschel (O, ω) fallenden Treffgeraden entsprechender Strahlen. Nach I, (1.) ist diese Anzahl gleich 2, und wir haben somit $2 \cdot 2 = 4$ Treffgeraden an entsprechende Strahlen aus allen 3 Netzen im Büschel (O, ω), die nicht mit l identisch sind.

Da die Gesamtanzahl dieser Treffgeraden in jedem Büschel gleich 6 ist, so muß l und ebenso jede andere Leitgerade *Doppelstrahl* des Komplexes sein.

Es ist nun auch von Wichtigkeit, den Grad derjenigen

Regelfläche in jedem der Netze festzustellen, die von den Geraden gebildet wird, welche zu den von den Kanten eines Komplexkegels getroffenen Tripeln gehören.

Wir denken uns also eine beliebige Gerade g und die von ihr getroffene Regelschar aus einem der 3 Netze. In den beiden anderen Netzen entsprechen ihr gleichfalls Regelscharen, und die Zahl, die wir haben wollen, ist also die Anzahl derjenigen Strahlen aus dem Scheitel unseres Komplexkegels, die entsprechende Erzeugende dieser 3 projektiven Regelscharen treffen. Diese Zahl ist nach I, (6.) gleich 6. Die gesuchte Regelfläche ist also sechsten Grades, und wie sich analog zeigen läßt, ist auch die zu einer Komplexkurve in jedem der Netze gehörige Regelfläche sechsten Grades.

Sind weiter 4 kollineare Netze gegeben, so wird durch die Treffgeraden entsprechender Strahlen eine Kongruenz erzeugt. Um die Ordnung zu bestimmen, betrachten wir zunächst nur 3 von den Netzen, etwa N_1, N_2, N_3; sie erzeugen durch die Treffgeraden entsprechender Strahlen einen Komplex sechsten Grades. Wir denken uns den Komplexkegel, der von einem beliebigen Punkte P ausgeht. In jedem der 3 Netze bilden die von den Kanten dieses Kegels getroffenen entsprechenden Strahlen eine Regelfläche sechsten Grades, und dasselbe gilt von den entsprechenden Strahlen im Netze N_4.

Wir haben also einen Kegel sechster Ordnung, dessen Kanten eineindeutig auf die Erzeugenden einer Regelfläche sechsten Grades bezogen sind.

Es gibt daher 12 Kanten dieses Kegels, welche die entsprechende Erzeugende, d. h. zu dem getroffenen Tripel den vierten entsprechenden Strahl treffen.

Die Kongruenz ist also von der Ordnung 12; dual läßt sich die Klasse 12 feststellen.

Die Bestimmung der fraglichen Gradzahlen können wir nun auch unter Benutzung des Korrespondenzprinzipes im Strahlenbündel bezw. Strahlenfelde ausführen. Wir wollen nach dieser Methode die Klasse der Kongruenz ermitteln und haben also das Korrespondenzprinzip im Strahlenfelde anzuwenden.

Dieses besagt: Wenn zwischen den Geraden x und x' zweier ineinander liegender Strahlenfelder eine solche Zuordnung besteht, daß jedem x n Strahlen x' und jedem x' n' Strahlen x entsprechen und daß, wenn der eine Strahl einen Büschel durchläuft, von den entsprechenden eine Kurve $m$ter Klasse umhüllt wird, so vereinigen sich $n + n' + m$ Strahlen x mit einem entsprechenden x'.

Um dieses Prinzip hier anwenden zu können, teilen wir die 4 gegebenen Netze in 2 Paare $N_1 N_2$ und $N_3 N_4$. Ein beliebiger Strahl x der betrachteten Ebene ε trifft nun 2 Paare entsprechender Strahlen aus N_1 und N_2; von den Treffgeraden der beiden entsprechenden Paare aus N_3 und N_4 fällt je eine in die Ebene ε. Folglich ist in unserem Falle $n = 2$ und ebenso $n' = 2$.

Um nun die Gradzahl m zu ermitteln, haben wir zunächst festzustellen, welche Regelfläche in jedem von 2 kollinearen Netzen die getroffenen Strahlen bilden, wenn die Treffgerade einen Büschel beschreibt. Wir fragen also, wie viele von den genannten Geraden aus N_2 der beliebigen Geraden g begegnen. Den beliebigen Büschel in der Ebene ε denken wir uns demselben Raume angehörend, in dem N_1 liegt; ihm entspricht im Raume von N_2 gleichfalls ein Büschel. Jeder Strahl des Netzes N_2 begegnet nun einem Strahle dieses im Raume von N_2 gelegenen Büschels; trifft er zu diesem Strahle auch den entsprechenden in dem zum Raume von N_1 gehörigen Büschel, so hat er die Eigenschaft, die wir wünschen: er wird zugleich mit seinem entsprechenden in N_1 von einem Strahle des beliebigen Büschels getroffen. Die fraglichen Geraden in N_2 sind also solche, die entsprechenden Strahlen der beiden genannten projektiven Büschel und außerdem den Leitgeraden von N_2 begegnen.

Wir wollen wissen, wie viele von diesen Geraden die beliebige Gerade g treffen.

Die Frage ist also zurückgeführt auf die folgende: es sind 2 projektive Strahlenbüschel im Raume gegeben und 3 feste Geraden; wie viele Treffgeraden entsprechender Strahlen der beiden Büschel gibt es, die gleichzeitig die 3 festen Geraden treffen?

Um diese Frage zu beantworten, betrachten wir in einem der beiden Büschel die folgende Korrespondenz.

Zu einem beliebigen Strahle a nehmen wir den entsprechenden Strahl im anderen Büschel und legen an ihn und die 3 festen Geraden die beiden Treffgeraden, die je einem Strahle des Büschels begegnen. Diese beiden Strahlen a' ordnen wir dem a zu. Zu einem beliebigen Strahle a' nun und den 3 festen Geraden gibt es 2 Treffgeraden, die je einem Strahle des anderen Büschels begegnen; die beiden Strahlen a, die diesen Strahlen im ersten Büschel entsprechen, sind dem a' zugeordnet. Somit haben wir eine Korrespondenz $[2,2]$ erhalten. Sie hat 4 Koinzidenzstrahlen, und jeder solche Strahl hat die Eigenschaft, daß zu ihm und seinem entsprechenden im zweiten Büschel eine Treffgerade existiert, die gleichzeitig den 3 festen Geraden begegnet.

Damit haben wir also erkannt: Wenn der Strahl x einen Büschel durchläuft, so erzeugen die getroffenen Strahlen in N_2 und ebenso die in N_1 eine Regelfläche vierten Grades. Dasselbe gilt von den entsprechenden Strahlen in N_3 und N_4.

Diese Regelflächen schneiden in die Ebene ε 2 Kurven vierter Ordnung ein, die sich in eineindeutiger Zuordnung ihrer Punkte befinden. Durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte dieser beiden Kurven wird eine Kurve achter Klasse erzeugt, und das ist die Kurve der x', die dem Büschel der x entspricht.

Die Zahl m ist also gleich 8; somit haben wir $n = 2$, $n' = 2$, $m = 8$ und daher $n + n' + m = 12$ Koinzidenzstrahlen, d. h. solche, die entsprechenden Strahlen aus allen 4 Netzen begegnen. Wir haben also auf zweifache Weise festgestellt:

(8.) *Sind 4 kollineare Strahlennetze gegeben, so wird durch die Treffgeraden der Quadrupel entsprechender Strahlen eine Kongruenz 12. Ordnung 12. Klasse erzeugt.*

Bei 5 kollinearen Netzen gibt es eine einfache Mannigfaltigkeit von solchen Quintupeln, die eine Treffgerade besitzen, und diese Treffgeraden erzeugen eine Regelfläche.

Wir greifen zunächst 4 von den gegebenen Netzen heraus und betrachten die durch diese erzeugte Kongruenz 12. Ordnung

12. Klasse. Diejenigen Geraden aus dieser Kongruenz, die einer beliebigen Geraden g begegnen, erzeugen eine Regelfläche 24. Grades.

Durch diese Gerade g wird aus der Kongruenz eine einfache Mannigfaltigkeit von Treffgeraden ausgesondert und damit eine ebensolche von Quadrupeln entsprechender Strahlen aus der vorhandenen zweifachen Mannigfaltigkeit. Wir brauchen nun den Grad derjenigen Regelflächen, welche durch die zu diesen Quadrupeln gehörigen Strahlen in den einzelnen Netzen erzeugt werden.

Wir denken uns also eine Gerade l, die aus N_1 eine Regelschar ausscheidet; ihr entsprechen in N_2, N_3, N_4 gleichfalls Regelscharen, und wir wollen nun wissen, wie viele Treffgeraden von Quadrupeln entsprechender Erzeugenden dieser 4 projektiven Regelscharen der Geraden g begegnen. Diese Anzahl ist nach I, (7.) gleich 16.

Die getroffenen Geraden in den einzelnen Netzen beschreiben also Regelflächen 16. Grades, wenn die Treffgeraden die beschriebene Regelfläche 24. Grades durchlaufen. Diesen Regelflächen entspricht nun eine ebensolche 16. Grades im fünften Netze. Diese beiden Regelflächen, die mit R^{24} und R^{16} bezeichnet seien, sind mit ihren Erzeugenden eineindeutig aufeinander bezogen; denn jede Erzeugende von R^{24} trifft ein Quadrupel entsprechender Strahlen aus N_1, N_2, N_3, N_4, und der diesem Quadrupel in N_5 entsprechende Strahl ist eine Erzeugende der R^{16}; andrerseits hat jede Erzeugende von R^{16} als Strahl von N_5 ein Quadrupel entsprechender Strahlen in N_1, N_2, N_3, N_4, und von dessen Treffgeraden trifft eine die g, und diese ist die Erzeugende von R^{24}, die der von R^{16} entspricht.

Nach II, (5.) gibt es also $24 + 16 = 40$ Paare von entsprechenden Erzeugenden, die sich treffen, oder die Gerade g wird von 40 Geraden getroffen, die entsprechenden Strahlen aus allen 5 Netzen begegnen.

Wir haben damit das Ergebnis:

(9.) *In 5 kollinearen Strahlennetzen gibt es ∞^1 Quintupel entsprechender Strahlen, die eine Treffgerade besitzen; das Erzeugnis dieser Treffgeraden ist eine Regelfläche 40. Grades.*

Wir untersuchen sodann die Regelflächen in den einzelnen Netzen, welche die zu diesen ausgezeichneten Quintupeln gehörigen Strahlen erzeugen. Wir denken uns zu diesem Zwecke eine Gerade g und die von ihr getroffene Regelschar aus einem der 5 Netze. Dieser entsprechen in den 4 anderen Netzen ebenfalls Regelscharen, und die gesuchte Zahl ist also die Zahl der bei 5 projektiven Regelscharen existierenden Quintupel entsprechender Erzeugenden, die eine Treffgerade besitzen. Nach I, (8.) ist diese Zahl 20. Somit ist erkannt, daß die getroffenen Strahlen in den einzelnen Netzen Regelflächen 20. Grades bilden.

Wir geben uns schließlich 6 kollineare Netze und fragen nach der Zahl derjenigen Systeme von je 6 entsprechenden Strahlen, die eine Treffgerade besitzen. Greifen wir 5 von den Netzen heraus, so haben wir nach dem vorangehenden Resultate eine Regelfläche 40. Grades, deren Erzeugende je 5 entsprechenden Strahlen begegnen. Die getroffenen Strahlen erzeugen Regelflächen 20. Grades, und eine solche ist also auch der Ort ihrer entsprechenden Strahlen im sechsten Netze. Diese ist mit ihren Erzeugenden eineindeutig auf die der genannten Regelfläche 40. Grades bezogen, und somit gibt es $40 + 20 = 60$ Paare von entsprechenden Erzeugenden, die sich treffen, oder 60 Geraden, die entsprechenden Strahlen aus allen 6 Netzen begegnen.

Also hat sich ergeben:

(10.) *In 6 kollinearen Strahlennetzen gibt es 60 Sextupel entsprechender Strahlen, die eine Treffgerade haben.*

IV. Gebilde dritter Stufe (Strahlengebüsche).

Wir schreiten sodann zur Untersuchung von kollinearen Gebüschen.

Unter einem Gebüsche verstehen wir einen speziellen linearen Komplex, nämlich die Gesamtheit der Geraden, die einer festen Geraden, der Achse des Gebüsches begegnen. Kollinear nennen wir solche Gebüsche, die in kollinearen Räumen einander entsprechen.

Sind zunächst 3 kollineare Gebüsche gegeben, so trifft jede Gerade des Raumes 2 Tripel entsprechender Strahlen; denn sie trifft aus dem ersten Gebüsche ein Netz, aus dem entsprechenden Netze im zweiten Gebüsche eine Regelschar und von der entsprechenden Regelschar im dritten 2 Erzeugende.

Liegen 4 kollineare Strahlengebüsche vor, die mit G_1, G_2, G_3, G_4 bezeichnet seien, so erzeugen die Treffgeraden der Quadrupel entsprechender Strahlen einen Komplex. Um den Grad zu bestimmen, betrachten wir in einem beliebigen Strahlenbüschel folgende Korrespondenz. Wir greifen zunächst 3 von den Gebüschen, etwa G_1, G_2, G_3 heraus; ein beliebiger Strahl a unseres Büschels trifft 2 Tripel entsprechender Strahlen aus diesen 3 Gebüschen; die beiden entsprechenden Strahlen im vierten Gebüsche treffen je einen Strahl a' des Büschels, und diese beiden a' ordnen wir dem a zu. Ein beliebiger Strahl a' trifft ein Netz von Strahlen aus G_4, dem in G_1, G_2, G_3 ebenfalls Netze entsprechen. Von den Treffgeraden an Tripel entsprechender Strahlen aus diesen 3 Netzen fallen nach III, (7.) 6 in unseren Büschel, und diese 6 sind die dem a' zugeordneten a. Mithin ist eine Korrespondenz [6, 2] entstanden; ihre 8 Koinzidenzstrahlen treffen entsprechende Strahlen aus allen 4 Gebüschen.

Wir erkennen also:

(1.) *Die Treffgeraden der Quadrupel entsprechender Strahlen in 4 kollinearen Strahlengebüschen erfüllen einen Komplex achten Grades.*

Die Achsen der einzelnen Gebüsche gehören dem Komplexe an, da jede sämtliche Strahlen ihres eigenen Gebüsches und aus den 3 anderen 2 Tripel entsprechender Strahlen trifft.

Wir können, ähnlich wie oben im Falle des durch drei kollineare Netze erzeugten Komplexes, beweisen, daß die Achsen Doppelstrahlen des Komplexes sind, dadurch, daß wir in jedem Büschel, dem eine der Achsen angehört, die übrigen Komplexstrahlen abzählen.

Denken wir uns also einen beliebigen Strahlenbüschel (O, ω), dem die Achse a von G_4 angehört. Ein von a verschiedener Strahl aus (O, ω) kann nur ein solches Quadrupel entsprechender

Strahlen von G_1, G_2, G_3, G_4 treffen, dessen zum Gebüsche G_4 gehöriger Strahl entweder durch O geht oder in ω liegt. Mit anderen Worten: der getroffene Strahl in G_4 muß entweder dem Bündel aus O oder dem Felde in ω angehören. Diesen beiden Gebilden entsprechen ebensolche in den 3 anderen Gebüschen. Wir suchen also einmal die in den Büschel (O, ω) fallenden Treffgeraden an je 3 entsprechende Strahlen aus den 3 kollinearen Bündeln in G_1, G_2, G_3, andrerseits die in denselben Büschel fallenden Treffgeraden an Tripel entsprechender Strahlen aus den 3 kollinearen Feldern in G_1, G_2, G_3. Nach dem Satze (1.) von III und dem zu ihm dualen Satze ist jede dieser Anzahlen gleich 3; somit haben wir in (O, ω) $2 \cdot 3 = 6$ Komplexstrahlen, die von a verschieden sind. Die Achse a repräsentiert somit in jedem Büschel, zu dem sie gehört, zwei Komplexstrahlen, ist also *Doppelstrahl* des Komplexes. Dasselbe gilt für die 3 übrigen Achsen.

Bei 5 kollinearen Gebüschen G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 gibt es ∞^2 ausgezeichnete Quintupel, die eine Treffgerade haben, und diese Treffgeraden erzeugen eine Kongruenz.

Die Ordnung dieser Kongruenz können wir in folgender Weise ermitteln. Wir betrachten einen beliebigen Komplexkegel des durch irgend 4 von den Gebüschen, etwa G_1, G_2, G_3, G_4, bedingten Komplexes und untersuchen zunächst den Grad der Regelfläche, welche von den zu den getroffenen Quadrupeln gehörigen Strahlen in jedem Gebüsche gebildet wird. Wir stellen uns also eine Gerade g vor, die aus G_4 ein Netz ausscheidet; diesem Netze entsprechen 3 Netze in G_1, G_2, G_3. Nun gehen durch unseren Punkt, der den Komplexkegel achter Ordnung trägt, 12 Treffgeraden von entsprechenden Quadrupeln dieser 4 Netze. Es gibt also in einem beliebigen Netze innerhalb G_4 12 Strahlen, die je mit ihren 3 entsprechenden in G_1, G_2, G_3 eine durch P gehende Treffgerade besitzen.

Die fragliche Regelfläche in jedem der 4 Gebüsche ist somit 12. Grades, und dasselbe gilt von der entsprechenden im Gebüsche G_5. Zu den Erzeugenden dieser Regelfläche befinden sich die Kanten des Komplexkegels achter Ordnung aus P in eineindeutiger Beziehung, mithin gibt es $8 + 12 = 20$ Paare, die

sich treffen. Durch P gehen also 20 Treffgeraden von Quintupeln entsprechender Strahlen.

Wir leiten die Ordnung der Kongruenz im folgenden nochmals ab, und zwar unter Anwendung des Korrespondenzprinzipes im Bündel. In einem beliebigen Strahlenbündel haben wir nämlich die folgende Korrespondenz. Wir teilen die 5 Gebüsche in eine Gruppe zu 3 und eine zu 2: G_1, G_2, G_3; G_4, G_5.

Ein beliebiger Strahl a unseres Bündels trifft 2 Tripel aus G_1, G_2, G_3; ihm ordnen wir die beiden vom Bündelscheitel P ausgehenden Treffgeraden a' der beiden entsprechenden Paare aus G_4, G_5 zu. Ein beliebiger Strahl a' andrerseits trifft aus G_4 ein Netz und aus dem entsprechenden Netze in G_5 eine Regelschar, also 2 entsprechende Regelscharen aus G_4, G_5; diesen entsprechen 3 untereinander projektive Regelscharen in G_1, G_2, G_3, und die dem a' zugeordneten a sind die von P ausgehenden Treffgeraden an Tripel entsprechender Strahlen aus diesen 3 projektiven Regelscharen; deren Anzahl ist 6.

Schließlich haben wir noch die Ordnung des Kegels zu ermitteln, der von den a' durchlaufen wird, wenn a einen Büschel beschreibt.

Dazu müssen wir erst wissen, wie sich dabei die getroffenen Geraden in G_1, G_2, G_3 bewegen. Wenn wir einen beliebigen Strahl a haben, so erhalten wir die beiden Geraden in G_3, die zu den von a getroffenen Tripeln gehören, folgendermaßen: sie sind die beiden Treffgeraden an die Achse von G_3, an die a und die beiden dieser a entsprechenden Geraden im Raume von G_3, wenn man a zu den Räumen von G_1 und G_2 rechnet. Beschreibt nun a einen Büschel, so tun das die beiden zuletzt genannten Geraden gleichfalls, und die Regelfläche der gesuchten Geraden in G_3 ist diejenige, die gebildet wird von den einer festen Geraden — nämlich der Achse von G_3 — begegnenden Treffgeraden entsprechender Strahlen in 3 projektiven Strahlenbüscheln. Da nun die Kongruenz der genannten Treffgeraden dritter Ordnung und dritter Klasse ist, so ist diese Regelfläche sechsten Grades.

Die entsprechenden beiden Regelflächen in G_4, G_5 sind somit auch sechsten Grades, und die von P ausgehenden Treff-

geraden an entsprechende Erzeugende dieser beiden Regelflächen bilden einen Kegel 12. Ordnung; dieser Kegel von Strahlen a' entspricht dem Büschel der a.

Wir haben also für unsere Korrespondenz in dem beliebigen Bündel: $n = 2$, $n' = 6$, $m = 12$; mithin ist $2 + 6 + 12 = 20$ die Anzahl der Koinzidenzstrahlen, d. h. der durch P gehenden Treffgeraden von entsprechenden Strahlen aus allen 5 Gebüschen. Die Ordnung der Kongruenz ist somit nochmals festgestellt.

Die beiden Methoden, die wir zur Bestimmung der Ordnung angewandt haben, lassen sich zur Feststellung der Klasse dualisieren und liefern also dieselbe Zahl.

Es ist nun auch von Interesse, die Gradzahlen der Kongruenz zu kennen, die von den getroffenen Strahlen in jedem Gebüsche gebildet wird. Durch jeden Punkt geht und in jeder Ebene liegt ein Büschel von Strahlen aus G_5; ihm entsprechen 4 Büschel in den anderen Gebüschen, und in diesen 5 projektiven Strahlenbüscheln gibt es nach I, (4.) 10 Quintupel mit Treffgerade; beide Gradzahlen der fraglichen Kongruenz sind somit 10.

Wir haben somit das Ergebnis:

(2.) *Liegen 5 kollineare Strahlengebüsche vor, so bilden die* ∞^2 *vorhandenen Treffgeraden an Quintupel entsprechender Strahlen eine Kongruenz 20. Ordnung 20. Klasse. Die zu diesen Quintupeln gehörigen Strahlen bilden in jedem der Gebüsche eine Kongruenz 10. Ordnung 10. Klasse.*

Wir betrachten sodann 6 kollineare Gebüsche G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6. Diese besitzen ∞^1 Sextupel mit einer Treffgerade, und die Gesamtheit dieser Treffgeraden bildet eine Regelfläche, deren Grad sich folgendermaßen ergibt.

Eine beliebige Gerade g scheidet aus der von G_1, G_2, G_3, G_4, G_5 erzeugten Kongruenz 20. Ordnung 20. Klasse eine Regelfläche 40. Grades aus. Es ist nun notwendig, zu wissen, von welchem Grade die Regelfläche ist, die von jeder der getroffenen Geraden durchlaufen wird, wenn der Kongruenzstrahl diese Regelfläche beschreibt.

Dazu müssen wir also feststellen, wie viele von diesen Geraden etwa aus G_5 einem beliebigen in G_5 enthaltenen Netze angehören. Diesem Netze entsprechen 4 ebensolche in den

anderen Gebüschen; nun gibt es bei 5 kollinearen Netzen eine Regelfläche 40. Grades von solchen Geraden, die 5 entsprechende Strahlen treffen. 40 von diesen Treffgeraden treffen also die g, und somit ist der Grad 40 der fraglichen Regelfläche gefunden.

Ihr entspricht im sechsten Gebüsche gleichfalls eine Regelfläche 40. Grades.

Wir haben also jetzt 2 Regelflächen 40. Grades, die mit ihren Erzeugenden eineindeutig aufeinander bezogen sind; mithin gibt es 80 Paare, die sich treffen. Es wird also die Gerade g von 80 Geraden getroffen, die einerseits einem Quintupel entsprechender Strahlen $G_1 \dots G_5$ und außerdem dem entsprechenden Strahle aus G_6 begegnen.

Die zu diesen ausgezeichneten Sextupeln gehörigen Geraden erzeugen in jedem Gebüsche eine Regelfläche; wir wollen auch deren Grad ermitteln. Durch eine beliebige Gerade g wird aus G_6 ein Netz ausgeschieden; ihm entsprechen 5 Netze in den anderen Gebüschen, und in diesen 6 zueinander kollinearen Netzen gibt es nach III, (10.) 60 Sextupel, die eine Treffgerade besitzen. Mithin wird g von 60 Geraden getroffen, die zu solchen ausgezeichneten Sextupeln gehören.

Mithin haben wir gefunden:

(3.) *Sind 6 kollineare Strahlengebüsche gegeben, so bilden diejenigen Strahlen des Raumes, die je 6 entsprechende Strahlen treffen, eine Regelfläche 80. Grades. Die getroffenen Strahlen in den einzelnen Gebüschen erzeugen Regelflächen 60. Grades.*

Nun seien 7 kollineare Gebüsche $G_1 \dots G_7$ gegeben. Sie besitzen nur noch eine endliche Anzahl solcher ausgezeichneter Systeme von je 7 entsprechenden Strahlen, die eine Treffgerade haben.

Um diese Anzahl zu ermitteln, greifen wir zunächst irgend 6 von den Gebüschen heraus, sie führen zu einer Regelfläche 80. Grades von solchen Geraden, die je 6 entsprechende Strahlen treffen. Die getroffenen Strahlen erzeugen in den einzelnen Gebüschen Regelflächen 60. Grades. Diesen entspricht im siebenten Gebüsche eine ebensolche, und deren Erzeugende sind auf die der Regelfläche 80. Grades eineindeutig bezogen. Folglich gibt es nach II, (5.) $80 + 60 = 140$ Paare, die sich

treffen, also 140 Erzeugende der Regelfläche 80. Grades, die zu dem jeweils getroffenen Sextupel auch noch den siebenten entsprechenden Strahl treffen.

Wir haben somit das Ergebnis:

(4.) *Bei 7 kollinearen Gebüschen tritt 140 mal der Fall ein, daß 7 entsprechende Strahlen von einer und derselben Geraden getroffen werden.*

Die Hauptergebnisse dieses Abschnittes ändern sich nicht, wenn statt der Gebüsche allgemeine lineare Komplexe betrachtet werden.

V. Gebilde vierter Stufe. (Strahlenräume.)

Sind 4 kollineare Räume $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$ gegeben, so wird jede beliebige Gerade g des Raumes Treffgerade entsprechender Strahlen aus allen 4 Räumen; wie oft?

Die Gerade g trifft von Σ_1 ein Gebüsche, von dem entsprechenden Gebüsche in Σ_2 ein Netz, von dem entsprechenden Netze in Σ_3 eine Regelschar und von der entsprechenden Regelschar in Σ_4 2 Erzeugende, also 2 Quadrupel entsprechender Strahlen aus allen 4 Räumen.

Die zu diesen Quadrupeln gehörigen Strahlen beispielsweise in Σ_4 sind also die 2 Treffgeraden der Geraden g, aufgefaßt als Gerade von Σ_4, und ihrer 3 entsprechenden in Σ_4, wenn man sie nacheinander als Gerade von $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ auffaßt.

In 5 kollinearen Räumen $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_5$ gibt es ∞^3 Quintupel entsprechender Strahlen, die eine Treffgerade besitzen; die Gesamtheit dieser Treffgeraden ist ein Komplex.

Den Grad dieses Komplexes stellen wir folgendermaßen fest. Wir denken uns einen beliebigen Strahlenbüschel (S, σ); jeder Strahl aus ihm trifft 2 Quadrupel entsprechender Strahlen aus $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$. Die an diesen Quadrupeln beteiligten Geraden bilden in jedem der Räume eine Regelfläche achten Grades, das Erzeugnis der Treffgeraden entsprechender Strahlen von 4 projektiven Strahlenbüscheln.

Diese 4 Büschel sind: der Büschel (S, σ), gerechnet zu dem

betreffenden Raume, und seine 3 entsprechenden in demselben Raume, wenn man ihn der Reihe nach den 3 anderen Räumen zurechnet. Diesen Regelflächen entspricht in Σ_5 gleichfalls eine solche achten Grades, die erzeugt wird durch die Treffgeraden entsprechender Strahlen derjenigen 4 Büschel in Σ_5, die dem Büschel (S, σ), gerechnet zu den Räumen Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4, entsprechen.

Durch diese Regelfläche wird nun im Büschel (S, σ) die folgende Korrespondenz hervorgerufen. Jeder Strahl a trifft 2 Quadrupel aus Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4; die beiden entsprechenden Strahlen in Σ_5 treffen je einen Strahl aus (S, σ), und diese beiden a' ordnen wir dem a zu. Andrerseits trifft nach der vorangehenden Erörterung jeder Strahl a' 8 Geraden aus Σ_5, an deren entsprechendes Quadrupel sich eine Treffgerade im Büschel (S, σ) befindet. Somit sind jedem a' 8 Strahlen a zugeordnet, so daß also eine Korrespondenz [8,2] entstanden ist.

Folglich gibt es in (S, σ) 10 Strahlen, die entsprechende Strahlen aus allen 5 Räumen treffen.

Von welchem Grade sind nun die Komplexe in den einzelnen Räumen, die durch die an diesen ausgezeichneten Quintupeln beteiligten Strahlen erzeugt werden? Oder wie viele Strahlen eines beliebigen Büschels in Σ_5 treffen eine der Treffgeraden des Quadrupels ihrer entsprechenden Strahlen in Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4?

Zur Beantwortung dieser Frage führt eine der vorigen sehr ähnliche Betrachtung. Denken wir uns nämlich einen zum Raume Σ_5 gehörigen Strahlenbüschel, so haben wir in ihm folgende Korrespondenz [8, 2]. Jeder Strahl a hat ein Quadrupel entsprechender in den 4 anderen Räumen, und die beiden Treffgeraden dieses Quadrupels treffen je einen Strahl des Büschels, und diese beiden a' ordnen wir dem a zu. Nun bilden die Treffgeraden entsprechender Strahlen aus den 4 unserem Büschel in den 4 anderen Räumen entsprechenden Büscheln eine Regelfläche achten Grades, von deren Erzeugenden 8 einem beliebigen Strahle a' des Büschels begegnen.

Die von diesen 8 Geraden getroffenen Quadrupel haben in unserem Büschel je einen entsprechenden Strahl, und somit sind 8 Strahlen a dem a' zugeordnet. Die 10 Koinzidenzstrahlen

dieser Korrespondenz sind solche in unserem Büschel von Σ_5, die von einer der Treffgeraden ihres entsprechenden Quadrupels getroffen werden.

Wir haben also erkannt:

(1.) *Sind 5 kollineare Räume gegeben, so gibt es einen Komplex zehnten Grades von solchen Geraden, die entsprechenden Strahlen aus den 5 Räumen begegnen. Die zu den getroffenen Quintupeln gehörigen Geraden in den einzelnen Räumen bilden ebenfalls Komplexe zehnten Grades.*

Zu jedem Komplexkegel gehören in den einzelnen Räumen Regelflächen 20. Grades, erzeugt durch die von seinen Kanten getroffenen Geraden. Denn diese Strahlen, etwa in Σ_5, sind diejenigen, welche entsprechenden Strahlen aus 5 kollinearen Bündeln begegnen, und zwar sind diese Bündel: der Bündel um den Scheitel des Komplexkegels, gerechnet zu Σ_5, und die 5 Bündel in Σ_5, die ihm als Bündel von Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 entsprechen.

Haben wir 6 kollineare Räume $\Sigma_1 \ldots \Sigma_6$, so gibt es ∞^2 Sextupel entsprechender Strahlen, die eine Treffgerade besitzen. Die Gesamtheit der letzteren ist eine Kongruenz.

Wir ermitteln zunächst die Ordnung. Ein beliebiger Punkt P trägt einen Kegel zehnter Ordnung, dessen Kanten entsprechende Strahlen aus $\Sigma_1 \ldots \Sigma_5$ treffen. Die zu diesen Quintupeln gehörigen Strahlen erzeugen in den einzelnen Räumen Regelflächen 20. Grades, und die entsprechenden Strahlen in Σ_6 erzeugen gleichfalls eine solche 20. Grades.

Die Kanten unseres Kegels zehnter Ordnung sind also eineindeutig auf die Erzeugenden dieser Regelfläche 20. Grades bezogen. Mithin treffen $10 + 20 = 30$ Kanten des Kegels die entsprechende Erzeugende der Regelfläche, d. h. es gehen durch P 30 Geraden, die entsprechenden Strahlen aus allen 6 Räumen begegnen.

Die Klasse könnten wir durch die duale Betrachtung ermitteln und würden also auch die Zahl 30 erhalten. Wir wollen diese Anzahl jedoch noch auf einem anderen Wege feststellen, indem wir das Korrespondenzprinzip im Strahlenfelde anwenden.

Wir teilen die 6 Räume in eine Gruppe zu 4 und eine zu 2: Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4; Σ_5, Σ_6, und betrachten nun in einer beliebigen Ebene folgende Korrespondenz. Ein beliebiger Strahl x trifft 2 Quadrupel entsprechender Strahlen aus $\Sigma_1 \ldots \Sigma_4$; von den Treffgeraden an die beiden diesen Quadrupeln in Σ_5 und Σ_6 entsprechenden Paare fällt je eine in die gegebene Ebene, und diese 2 Strahlen x' ordnen wir dem x zu. Ein beliebiger Strahl x' andrerseits trifft ein Gebüsche aus Σ_5 und von dem entsprechenden in Σ_6 ein Netz, also 2 einander entsprechende Netze aus Σ_5 und Σ_6; diesen Netzen entsprechen 4 Netze in $\Sigma_1 \ldots \Sigma_4$, und von den Treffgeraden an Quadrupel entsprechender Strahlen aus ihnen fallen nach III, (8.) 12 in die Ebene, und diese 12 Strahlen x sind dem x' zugeordnet.

Wir haben sodann noch die Zahl m zu ermitteln, welche die Klasse der von x' umhüllten Kurve bezeichnet, wenn x einen Büschel durchläuft. Wir haben schon oben gezeigt, daß, wenn ein Strahl x einen Büschel durchläuft, die Strahlen, die zu den von ihm getroffenen Quadrupeln gehören, in jedem der Räume Regelflächen achten Grades beschreiben. Diesen entsprechen in Σ_5 und Σ_6 ebensolche Regelflächen; sie schneiden in die betrachtete Ebene Kurven achter Ordnung ein, die mit ihren Punkten eineindeutig aufeinander bezogen sind. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte umhüllen eine Kurve 16. Klasse, und das ist die Kurve der x', die dem Büschel der x entspricht. Unsere Zahl m ist also $= 16$; ferner haben wir festgestellt: $n = 2$, $n' = 12$. Folglich gibt es $2 + 12 + 16 = 30$ Koinzidenzstrahlen, das sind solche Strahlen, die entsprechende Strahlen aus allen 6 Räumen treffen. Somit ist die Klasse 30 der Kongruenz gefunden; der zu dem vorangehende duale Gedankengang würde zur Ordnung 30 führen.

Diese Kongruenz wird durch die Treffgeraden gewisser ∞^2 ausgezeichneter Sextupel erzeugt; die zu diesen Sextupeln gehörigen Geraden bilden nun in den einzelnen Räumen gleichfalls Kongruenzen 30. Ordnung 30. Klasse, wie wir folgendermaßen erkennen.

Ein beliebiger Punkt P scheidet aus einem der Räume, etwa Σ_6, einen Bündel aus, dem 5 andere Bündel in den übrigen

Räumen entsprechen. Diese 6 kollinearen Bündel besitzen nun nach III, (6.) 30 Sextupel entsprechender Strahlen, die eine Treffgerade haben, also gehen durch P 30 Geraden aus Σ_6, die zu ausgezeichneten Sextupeln der genannten Art gehören. Dual folgt, daß auch in jede Ebene 30 solcher Geraden fallen, und damit ist die Behauptung erwiesen.

Wir sind somit zu dem Ergebnis gelangt:

(2.) *In 6 kollinearen Räumen gibt es ∞^2 Sextupel entsprechender Strahlen, die eine Treffgerade besitzen, und der Inbegriff dieser Treffgeraden ist eine Kongruenz 30. Ordnung 30. Klasse. In den einzelnen Räumen erzeugen die zu diesen ausgezeichneten Sextupeln gehörigen Strahlen gleichfalls Kongruenzen 30. Ordnung 30. Klasse.*

Es seien nunmehr 7 kollineare Räume $\Sigma_1 \ldots \Sigma_7$ gegeben; in ihnen gibt es ∞^1 Systeme von je 7 entsprechenden Strahlen, die eine Treffgerade haben, und die Gesamtheit dieser Treffgeraden ist somit eine Regelfläche. Um ihren Grad zu ermitteln, denken wir uns eine beliebige Gerade g; diese trifft aus der durch beliebige 6 von den Räumen hervorgerufenen Kongruenz 30. Ordnung 30. Klasse eine Regelfläche 60. Grades. Zunächst müssen wir nun den Grad der Regelflächen wissen, die durch die an den getroffenen Sextupeln beteiligten Strahlen gebildet werden.

Eine beliebige Gerade scheidet aus einem der Räume ein Gebüsche aus, dem 5 andere in den übrigen Räumen entsprechen. Diese 6 untereinander kollinearen Gebüsche führen nach IV, (3.) zu einer Regelfläche 80. Grades, deren Erzeugende je 6 entsprechenden Strahlen begegnen, d. h. in dem Gebüsche gibt es 80 Strahlen, die je mit ihren 5 entsprechenden ein Sextupelbilden, das von einer die Gerade g treffenden Geraden getroffen wird.

Damit haben wir also erkannt, daß, wenn die Treffgeraden die durch die Gerade g ausgeschiedene Regelfläche 60. Grades durchlaufen, die getroffenen Geraden Regelflächen 80. Grades erzeugen.

Diesen entspricht nun im siebenten Raume auch eine Regelfläche 80. Grades, die mit ihren Erzeugenden eineindeutig auf die der Regelfläche 60. Grades bezogen ist. Also gibt es 140 Paare, die sich treffen, d. h. die Gerade g wird von 140 solchen Geraden getroffen, die je 7 entsprechenden Strahlen begegnen.

Die zu diesen ausgezeichneten Systemen von je 7 gehörigen Strahlen erzeugen in den einzelnen Räumen gleichfalls Regelflächen 140. Grades. Denn eine beliebige Gerade in einem der Räume scheidet aus diesem ein Gebüsche aus, dem 6 Gebüsche in den übrigen Räumen entsprechen.

Nach IV, (4.) kommt es nun 140 mal vor, daß 7 entsprechende Strahlen aus diesen 7 Gebüschen von einer und derselben Geraden getroffen werden. Der Grad der fraglichen Regelfläche ist also, wie behauptet, gleich 140.

Somit ist festgestellt:

(3.) *Sind 7 kollineare Räume gegeben, so gibt es ∞^1 solche Systeme von je 7 entsprechenden Strahlen, die eine Treffgerade besitzen. Sowohl die Treffgeraden wie die zu diesen Systemen gehörigen Strahlen in den einzelnen Räumen erzeugen Regelflächen 140. Grades.*

Sind 8 kollineare Räume $\Sigma_1 \ldots \Sigma_8$ gegeben, so fragen wir nach der Anzahl derjenigen Systeme von je 8 entsprechenden Strahlen, die eine Treffgerade haben. Nach dem vorangehenden Satze führen beliebige 7 von den 8 Räumen zu einer Regelfläche 140. Grades, erzeugt durch Treffgeraden von je 7 entsprechenden Strahlen. Da die getroffenen Strahlen gleichfalls Regelflächen 140. Grades erzeugen, entspricht diesen im achten Raume auch eine solche, die mit ihren Erzeugenden eineindeutig auf die erstgenannte bezogen ist. Es gibt daher nach II, (5.) 280 Paare von entsprechenden Erzeugenden, die sich treffen, d. h. 280 solche Geraden, die je 8 entsprechenden Strahlen begegnen.

Dieses Resultat wollen wir nun noch auf eine zweite Weise, und zwar unter Anwendung des Korrespondenzprinzipes im Strahlenraume[1]) ableiten. Dieses lautet folgendermaßen: Zwischen 2 Strahlenräumen G und G_1 bestehe eine Zuordnung ihrer Strahlen x und x_1; jedem x entprechen n_1 Strahlen x_1, jedem x_1 n Strahlen x; beschreibt x einen Strahlenbüschel, so erzeugt x_1 eine Regelfläche $m_1$ten Grades, und durchläuft x_1 einen Büschel, so erzeugt x eine Regelfläche $m$ten Grades; endlich gebe es p Paare entsprechender Strahlen, welche durch

[1]) vgl. Sturm, Liniengeometrie I Nr. 37.

2 gegebene Punkte bezw. gehen, und p' Paare, welche in 2 gegebene Ebenen fallen, oder wenn der eine Strahl einen Bündel bezw. ein Feld durchläuft, so erzeugen die entsprechenden eine Kongruenz von der Ordnung p bezw. der Klasse p'. Dann gibt es $n + m + p + p' + m_1 + n_1$ Koinzidenzstrahlen.

Um dieses Prinzip hier anwenden zu können, teilen wir die 8 Räume in 2 Gruppen zu 4: $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$; $\Sigma_5, \Sigma_6, \Sigma_7, \Sigma_8$ und ordnen in 2 Strahlenräumen G und G_1 solche Strahlen x und x_1 einander zu, von denen x Treffgerade von 4 entsprechenden Strahlen aus $\Sigma_1 \ldots \Sigma_4$ ist und x_1 Treffgerade der 4 entsprechenden aus $\Sigma_5 \ldots \Sigma_8$.

Wir haben also für diese Zuordnung die 6 Zahlen n, n_1, m, m_1, p, p' zu ermitteln. Jeder Strahl x trifft 2 Quadrupel entsprechender Strahlen aus $\Sigma_1 \ldots \Sigma_4$; die beiden entsprechenden Quadrupel in $\Sigma_5 \ldots \Sigma_8$ haben je 2 Treffgeraden, und somit ist $n_1 = 4$. Ebenso folgt auch $n = 4$, da die x und x_1 einander ganz gleichartig entsprechen.

Beschreibt nun x einen Strahlenbüschel, so erzeugen die zu den getroffenen Quadrupeln gehörigen Strahlen Regelflächen achten Grades, wie zu Anfang dieses Abschnittes gezeigt worden ist. Denselben Grad besitzen die von den entsprechenden Strahlen in $\Sigma_5 \ldots \Sigma_8$ beschriebenen Regelflächen. Die Regelfläche der x_1, die dem Büschel der x entspricht, ist also diejenige, die erzeugt wird durch die Treffgeraden von je 4 entsprechenden Erzeugenden aus 4 Regelflächen achten Grades, deren Erzeugende in eineindeutiger Beziehung zueinander stehen. Nach II, (6.) ist diese Regelfläche 64. Grades. Es ist somit $m_1 = 64$ und ebenso $m = 64$.

Sodann lassen wir, um p zu bestimmen, x einen Bündel durchlaufen; die getroffenen Strahlen in den einzelnen Räumen durchlaufen dann Kongruenzen sechster Ordnung sechster Klasse; denn die fraglichen Strahlen etwa in Σ_4 sind die Treffgeraden sämtlicher Quadrupel aus den folgenden 4 kollinearen Bündeln: der beliebige von x beschriebene Bündel, gerechnet zum Raume Σ_4, und die 3 Bündel in Σ_4, die diesem als Bündel von Σ_1, Σ_2, Σ_3 entsprechen. Die entsprechenden Strahlen in den 4 übrigen Räumen $\Sigma_5 \ldots \Sigma_8$ erzeugen also ebensolche Kongruenzen sechster

Ordnung sechster Klasse. Wir haben also jetzt die folgende Sachlage: gegeben sind 4 Kongruenzen sechster Ordnung sechster Klasse, die in kollinearen Räumen einander entsprechen; die Treffgeraden der Quadrupel entsprechender Strahlen aus ihnen erzeugen wiederum eine Kongruenz, deren Ordnung p nach II, (7.) gleich 72 ist.

Auf dem dualen Wege ergibt sich $p' = 72$.

Wir haben also für die Korrespondenz zwischen den beiden Strahlenräumen die Werte:

$$n = n_1 = 4,\ m = m_1 = 64,\ p = p' = 72,$$

und somit ist die Anzahl der Koinzidenzstrahlen

$$n + m + p + p' + m_1 + n_1 = 280.$$

Es ist also nochmals gezeigt:

(4.) *Sind 8 kollineare Räume gegeben, so tritt 280 mal der Fall ein, daß 8 entsprechende Strahlen eine Treffgerade besitzen.*

Dieses letzte Ergebnis wird in der Dissertation von R. Schmidt, „Über zweite Polarflächen einer allgemeinen Fläche 4. Ordnung" (Breslau 1908, S. 95) gebraucht.

Zur Übersicht über die erhaltenen Resultate dient die nachstehende Tabelle. In jeder Kolonne hinter dem Doppelstrich stehen nacheinander: der Grad des Komplexes, die beiden Gradzahlen der Kongruenz, der Grad der Regelfläche und die Anzahl der Treffgeraden entsprechender Strahlen aus projektiven oder kollinearen Gebilden, deren Art an der Spitze der Kolonne und deren Anzahl auf derselben Linie vor dem Doppelstrich steht.

Anzahl der gegebenen Gebilde	Büschel	Regelscharen	Bündel oder Felder	Netze	Gebüsche	Räume
2	2	4				
3	3, 3	6, 6	3	6		
4	8	16	6, 6	12, 12	8	
5	10	20	20	40	20, 20	10
6			30	60	80	30, 30
7					140	140
8						280

Spezialdruckerei für Dissertationen, Robert Noske, Borna-Leipzig.

Lebenslauf.

Ich, Fritz Kliem, katholischen Bekenntnisses, bin geboren am 15. Mai 1887 zu Ober-Heiduk, Kreis Beuthen, als Sohn des Kaufmanns Wilhelm Kliem und seiner Frau Louise geb. Bomnüter. Ich besuchte das städtische Johannes-Gymnasium in Breslau und bestand Ostern 1905 die Reifeprüfung. Darauf widmete ich mich, veranlaßt durch die vielfachen von meinem verehrten Lehrer, Herrn Professor Dr. E. Töplitz, in dem mathematischen Unterrichte empfangenen Anregungen, dem Studium der Mathematik und Naturwissenschaften an der Universität Breslau. Während des Sommersemesters 1906 besuchte ich die Universität München.

In dankbarer Gesinnung nenne ich die Namen der Herren Professoren und Dozenten, an deren Vorlesungen und Übungen ich während meiner Studienzeit teilgenommen habe:

Baumgartner, Hintze, Hönigswald, Kneser, Kühnemann, Landsberg, Lummer, E. Pringsheim, Rosanes, Schäfer, Sturm, Waetzmann an der Breslauer, Cornelius, Döhlemann, Lindemann, A. Pringsheim, Voß an der Münchener Universität.

Zubesonderem Danke fühle ich mich Herrn Geheimrat Professor Dr. Sturm verpflichtet für die in seinen Vorlesungen und Seminaren genossene Anleitung und Förderung sowie für die Anregung zu der vorliegenden Arbeit.